

CALCULO ELECTRONICO DE LA RESPUESTA DINAMICA PARA PORTICOS PLANOS DE VARIAS PLANTAS

(C.D.U. 624. 04)

ANTONIO GARCIA DE ARANGO

Doctor Arquitecto. Catedrático de Estructuras de la ETSA de Madrid.

VICENTE REMESAL Y LORENZO

Ingeniero de Caminos. Profesor de Matemáticas de la ETSICCP.

El trabajo que a continuación se presenta resuelve la respuesta dinámica de una estructura plana ortogonal frente a desplazamientos de apoyo o fuerzas dinámicas horizontales aplicadas en sus plantas. Las masas se han considerado localizadas en los diversos pisos; se supone que en todo momento la estructura reacciona según el régimen lineal habitual, considerando un amortiguamiento para cada masa proporcional a su velocidad.

A partir del programa PORTGE, desarrollado en la Escuela de Arquitectura, cuyo Organigrama Bloque se acompaña, se calculan la matriz de rigideces, sus valores y vectores propios, dibujando por Plotter las formas propias de vibración. El último programa ARAREM calcula los desplazamientos de la vibración forzada de apoyo o pisos mediante integración de impulsos. Puede dar flectores, cortantes y desplazamientos por Plotter, para instantes elegidos por el Operador.

Otros programas permiten calcular los desplazamientos de vibración libre con amortiguamiento VILIAM y de vibración forzada por excitación armónica en pisos o apoyo OSPORT. Este último además de los desplazamientos da momentos flectores.

RESPUESTA DINAMICA DE ESTRUCTURAS RETICULARES PLANAS

Se trata de un amplio programa que halla los desplazamientos de la estructura y también los correspondientes esfuerzos de las barras. El tipo de estructuras que para el estudio dinámico se ha considerado, es el de reticular plana ortogonal. Los desplazamientos y esfuerzos generados en la respuesta corresponderán a los diversos instantes de tiempo considerados.

Normalmente, dado el tipo de estructura reticular ortogonal, los desplazamientos considerados son, en general, horizontales, ya que son los más peligrosos en la acción sísmica. Las barras horizontales son las vigas de pisos, y las verticales los pilares.

A las barras horizontales se les asigna en la oscilación la masa del piso correspondiente que se considere, mientras que a los pilares se los considera sin masa. Así, un pórtico de n plantas sólo tiene n masas aisladas y, por lo tanto, n grados de libertad.

El programa comienza por calcular las formas normales de vibración de la estructura, para lo que debe hallar: bien la matriz de flexibilidad o la de rigidez, según se emplee uno u otro método en aquella determinación. Y a partir de ellas hallar la deformada de la estructura compatible y que en nuestro caso va a estar definida por los desplazamientos de los nudos en la dirección de las barras horizontales para cada forma de vibrar.

Se ha utilizado para la puesta a punto de los programas el ordenador 1620 de la ETSA de Madrid y como lenguaje de programación FORTRAN II-D.

Para hallar la matriz de flexibilidad dinámica se utilizó el programa PORTGE, puesto en funcionamiento con anterioridad por el Centro de Cálculo de la ETSA, determinándose el polinomio característico y sus raíces; pero por problemas de precisión se abandonó este método y se pasó a utilizar la rigidez dinámica de la estructura, por medio de la cual, y mediante el programa ZVILAV (que es modificación de uno de IBM), se hallan los valores y vectores propios normalizados del sistema. El programa prosigue con la vibración libre de la estructura, debida a un desplazamiento inicial de los nudos o a una velocidad inicial de ellos también, o incluso la actuación simultánea en los dos casos, es decir, desplazamiento y velocidad en cada nudo. En todo caso se obtienen los desplazamientos, cortantes y momentos dinámicos compatibles con el estado de deformación.

Se ha prescindido de la deformación debida al esfuerzo axial, estando por lo demás dentro de la hipótesis lineal habitual en la Resistencia de Materiales.

Se estudia posteriormente la vibración forzada de la estructura debida a fuerzas cualesquiera variables en el tiempo, y como caso particular a fuerzas que varíen senoidalmente; igualmente se estudia el caso de desplazamiento forzado en los apoyos de la estructura y dentro de este caso se ha evaluado el sísmico mediante una función que es un movimiento armónico modulado. El organigrama bloque en este caso con el nombre genérico de PORTGE se inserta en esta Memoria, y consta de una serie de subprogramas, en los que se resuelve primero el cálculo de los valores y vectores propios, incluyéndose todos los subprogramas hasta el ZVILAV inclusive y calculándose la vibración forzada propiamente dicha en el ARAREM; todos los demás eslabones sirven para hallar si se quiere momentos y cortantes de cada barra y deformada de la estructura correspondiente a un estado de desplazamientos libre, forzado o normal. En el tratamiento del amortiguamiento se ha considerado para cada masa únicamente el que atañe a ella misma, despreciándose el amortiguamiento relativo a las demás (siempre proporcional a la velocidad). De esta forma las ecuaciones diferenciales que resultan son fácilmente resolubles una vez desacopladas previamente y resolviendo primero la parte homogénea, que es la parte libre, y luego la solución particular, que es la forzada, y que tiene creemos la enorme ventaja de admitir cualquier estado de excitación variable con el tiempo, ya sea de fuerzas o desplazamientos. La suma de los dos estados será la solución general o efecto dinámico del pórtico que se considere a acciones exteriores del tipo que sea: viento, sísmico, etc.

Todos los pasos dados en este trabajo han sido hechos siguiendo dos métodos diferentes: utilizándose de una parte y para el caso de excitación senoidal de apoyo o pisos el método basado en el cálculo de los factores de participación de cada modo normal de vibrar y sus consiguientes factores dinámicos, con su parte forzada y libre, y al programa que lo resuelve se le ha llamado OSPORT y no se incluye en este trabajo; y de

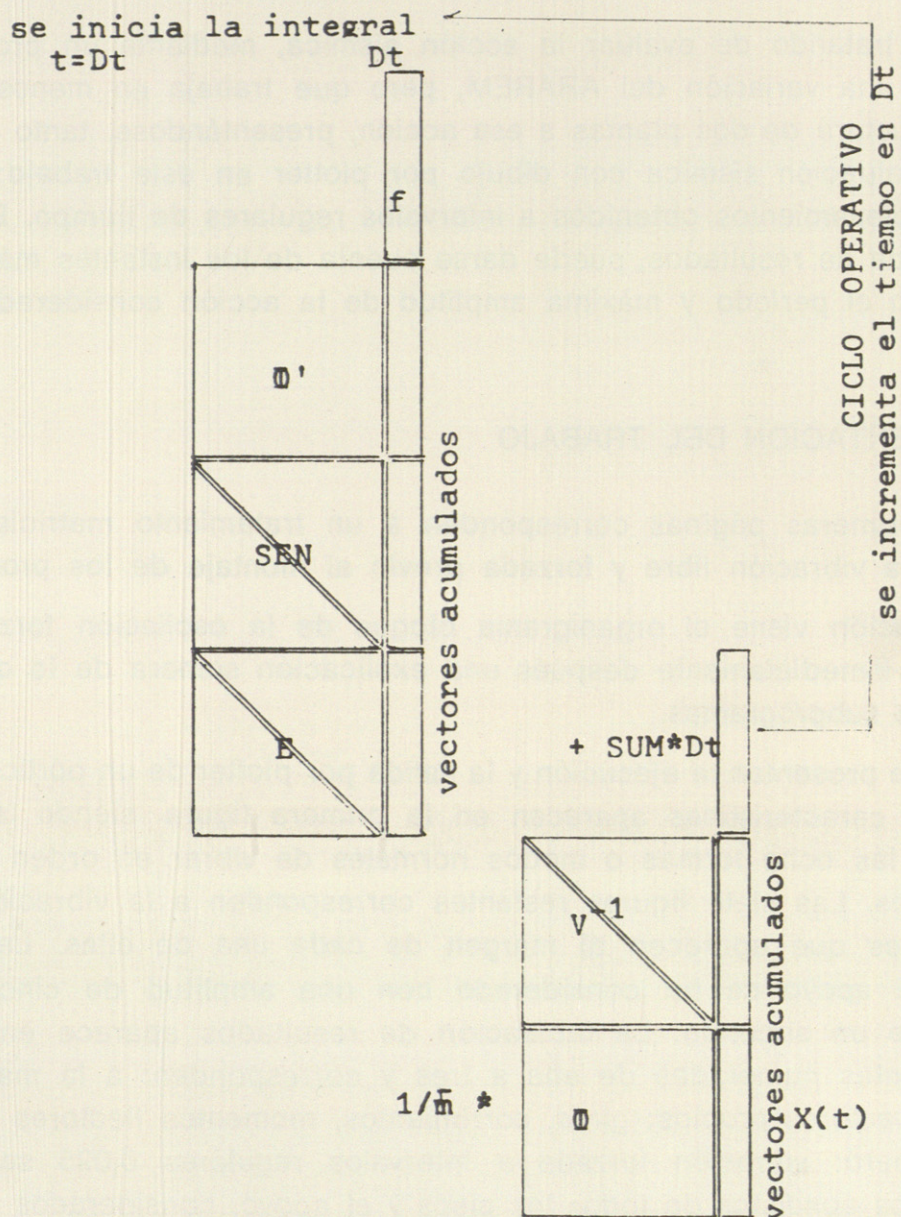
otra, el método general al que nos hemos venido refiriendo con el nombre genérico de PORTGE y que aborda el problema a partir de un tratamiento matricial de las ecuaciones diferenciales que definen el movimiento de la estructura según las acciones a las que se ve sometida y que se traducen en condiciones de contorno. Los resultados se han considerado firmes al llegar a una coincidencia satisfactoria en los resultados obtenidos.

Finalmente y tratando de evaluar la acción sísmica, mediante un programa llamado REMARA, que es una variación del ARAREM, pero que trabaja en menos tiempo, se ha sometido una estructura de dos plantas a esa acción, presentándose, tanto el pórtico como la curva de la evaluación sísmica con dibujo por plotter en este trabajo; igualmente se presentan los desplazamientos obtenidos a intervalos regulares de tiempo. El propio lector, observando la salida de resultados, puede darse cuenta de los instantes más desfavorables y relacionarlos con el período y máxima amplitud de la acción considerada.

ORDEN DE PRESENTACION DEL TRABAJO

- Las dos primeras páginas corresponden a un tratamiento matricial de las ecuaciones para vibración libre y forzada previo al montaje de los programas.
- A continuación viene el organigrama bloque de la oscilación forzada de apoyos o pisos, e inmediatamente después una explicación somera de lo que hacen cada uno de los subprogramas.
- Después se presentan la ejecución y la salida por plotter de un pórtico de ocho plantas, cuyas características aparecen en la primera figura siendo las ocho figuras siguientes las ocho formas o modos normales de vibrar en orden decreciente de los períodos. Las siete figuras restantes corresponden a la vibración forzada para los instantes que aparecen al margen de cada una de ellas. La excitación armónica de apoyo se ha considerado con una amplitud de cinco milímetros y período de un segundo. La tabulación de resultados aparece en las tres páginas siguientes numeradas de una a tres y corresponden: a la matriz de rigidez; valores y vectores propios; giros, corrimientos, momentos flectores y cortantes del modo primero; vibración forzada a intervalos regulares 0,025 segundos y desplazamientos absolutos de todos los pisos y el apoyo, considerados de arriba abajo (la fila que aparece entre cada dos instantes de tiempo corresponde al valor de la curva de amortiguamiento del inferior y para cada piso); para $t = 0,1$ segundos se vuelven a sacar resultados, y a continuación se siguen imprimiendo tiempos y desplazamiento hasta $t = 1$ segundo en que se vuelven a sacar resultados.
- A continuación viene un apartado dedicado a la evaluación del sismo y una ejecución por el programa REMARA.
- Finalmente, un apéndice matemático base de todo el trabajo y la bibliografía utilizada. Añadiéndose las cinco formas normales de vibrar para un pórtico de cinco plantas que se presenta al final.

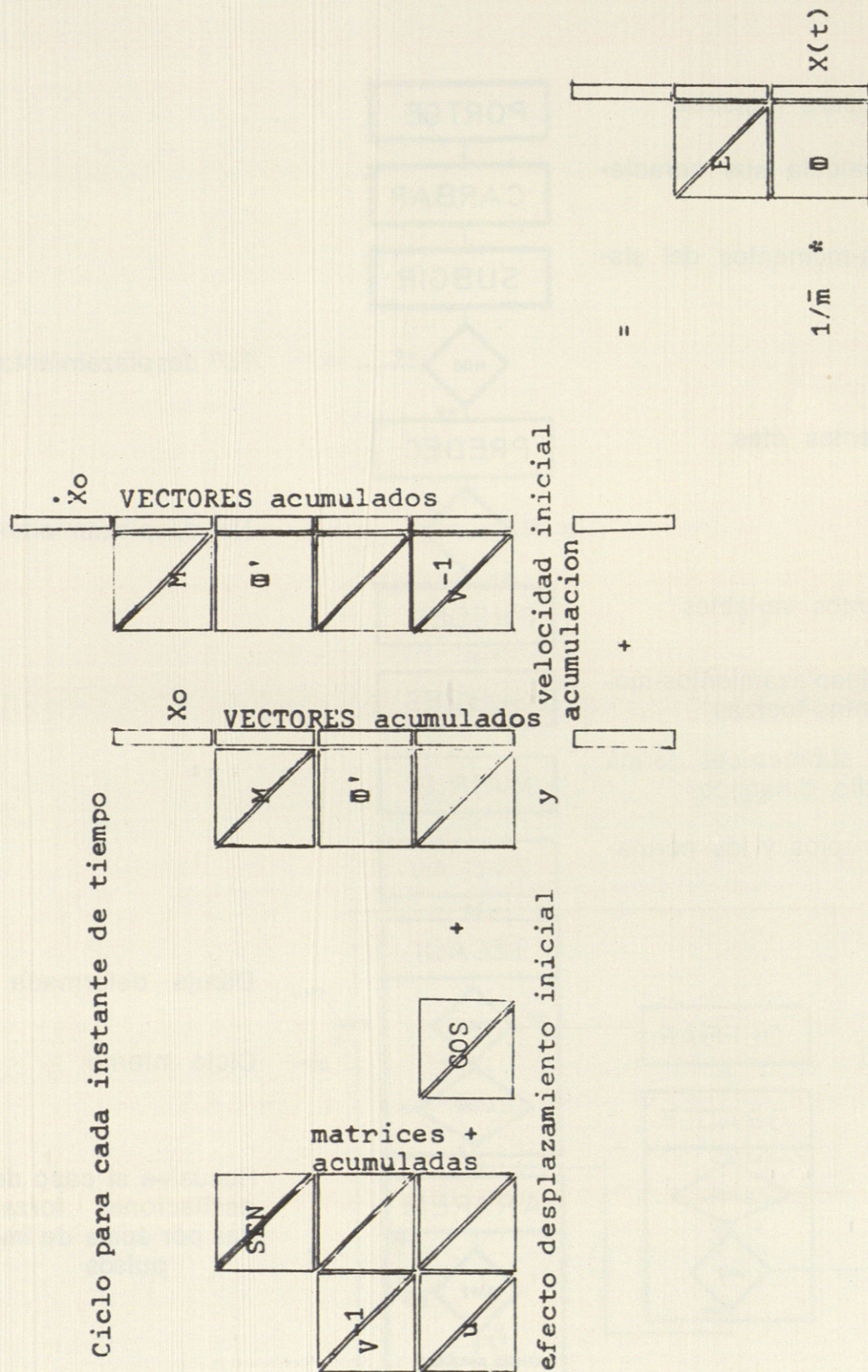
ESQUEMA MATRICIAL PARA MOVIMIENTO FORZADO AMORTIGUADO



$$x(t) = \left(\frac{1}{\bar{m}} \right) V^{-1} \Phi \int_0^t E \cdot \text{sen} \cdot \Phi' \cdot f \cdot Dt$$

NOTA.—La variable respecto a la que se está integrando no tiene nada que ver con el límite de la integral; la integral se hace sumando impulsos para cada instante de tiempo Dt y siguientes sumas sucesivas hasta cada instante considerado.

ESQUEMA MATRICIAL PARA OSCILACION LIBRE AMORTIGUADA N GRADOS DE LIBERTAD



$$X(t) = (1/\bar{m}) \Phi E ((\cos + u V^{-1} \text{sen}) \Phi' M X_0 + V^{-1} \text{sen} \Phi' M \dot{X}_0)$$

NOTA.—Significados de letras y símbolos en el apéndice matemático.

PROGRAMA PORTGE	ORGANIGRAMA BLOQUE PARA EVALUACION DE LA RESPUESTA DINAMICA
--------------------	--

Lee datos generales y prepara registros

Lee datos de barras y calcula sus características

Forma de submatriz giros-momentos del sistema intraslacional

Lee datos de desplazamientos ctes.

Lee datos de desplazamientos variables

Forma las submatrices desplazamientos-momentos y desplazamientos-fuerzas

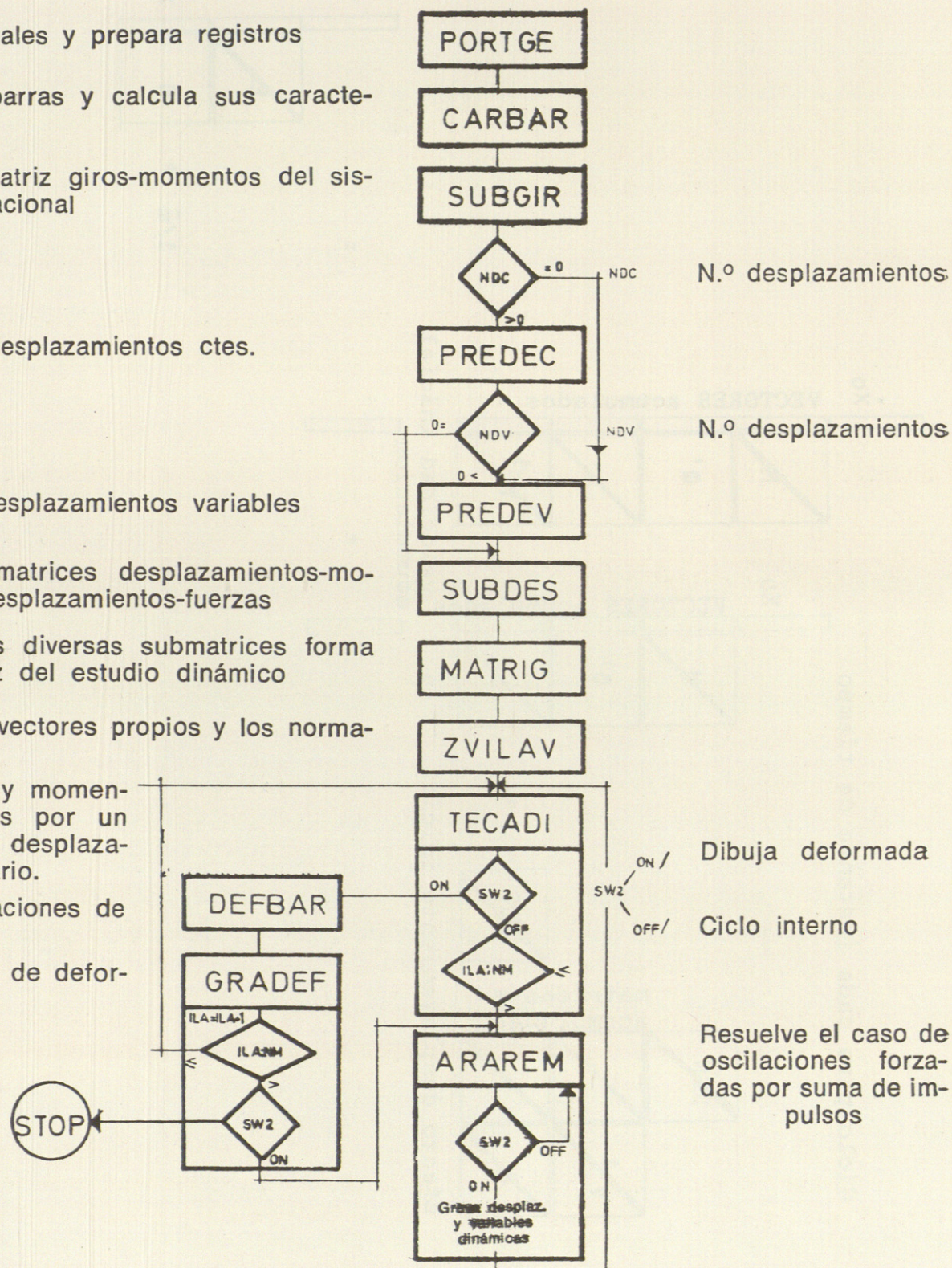
Manipulando las diversas submatrices forma la de rigidez del estudio dinámico

Halla valores y vectores propios y los normaliza

Halla los giros y momentos originados por un sistema de desplazamiento arbitrario.

Obtiene deformaciones de barras.

Traza la gráfica de deformación.



DESCRIPCION DE LOS SUBPROGRAMAS

PORTGE

Corresponde a datos generales del pórtico. En él se usa el indicador IED para el estudio dinámico y el parámetro NM (número de modos) como variables a considerar en el estudio. También, y mediante la ayuda de un "switch" (3), se pueden dibujar los pórticos a escala 1:100 ó 1:50.

CARBAR

Se leen y tratan los datos de barras, considerada ésta de longitud unidad y sección real. Lee el tipo de sección, si hay o no cartelas y el módulo de elasticidad de cada barra, si no admite uno genérico del acero u hormigón por programa.

SUBGIR

Forma la submatriz que da momentos para giros unidad, considerando la longitud real de cada barra.

En ella, la estructura es aún intraslacional.

PREDEC

Prepara los desplazamientos constantes. Y son los considerados en este estudio; es decir, uno por cada grado de libertad.

SUBDES

Forma la submatriz de desplazamientos. Es decir, la influencia del desplazamiento en los momentos y las fuerzas. Por medio del IED llama a MATRIG.

MATRIG

- Añade la submatriz de desplazamientos a la de giros que ha formado en SUBGIR, completándola con la simétrica ósea se halla la matriz de rigidez de la estructura. Se invierte la submatriz de giros para formar la matriz de rigidez de la estructura a considerar en el estudio dinámico.
- Finalmente calcula el vector que por rigidez de la estructura a movimiento de apoyos se genera a niveles de piso.

ZVILAV

Es un subprograma, adaptación de uno de IBM. Y halla los valores y vectores propios; es decir, los períodos y vectores propios correspondientes a cada una de las formas de vibrar.

TECADI

- Calcula los momentos y el cortante de cada barra y los imprime.
- Con el SWITCH 2 en ON llega a GRADEF, si no va directamente a ARAREM.

DEFBAR

- Imprime giros y desplazamientos de cada nudo. En nuestro caso, la columna segunda es de ceros por sólo considerar los desplazamientos horizontales.
- Los nudos van numerados en orden creciente de izquierda a derecha y de arriba abajo.
- Los giros que se imprimen aparecen en el orden dado y se leen por filas.

GRADEF

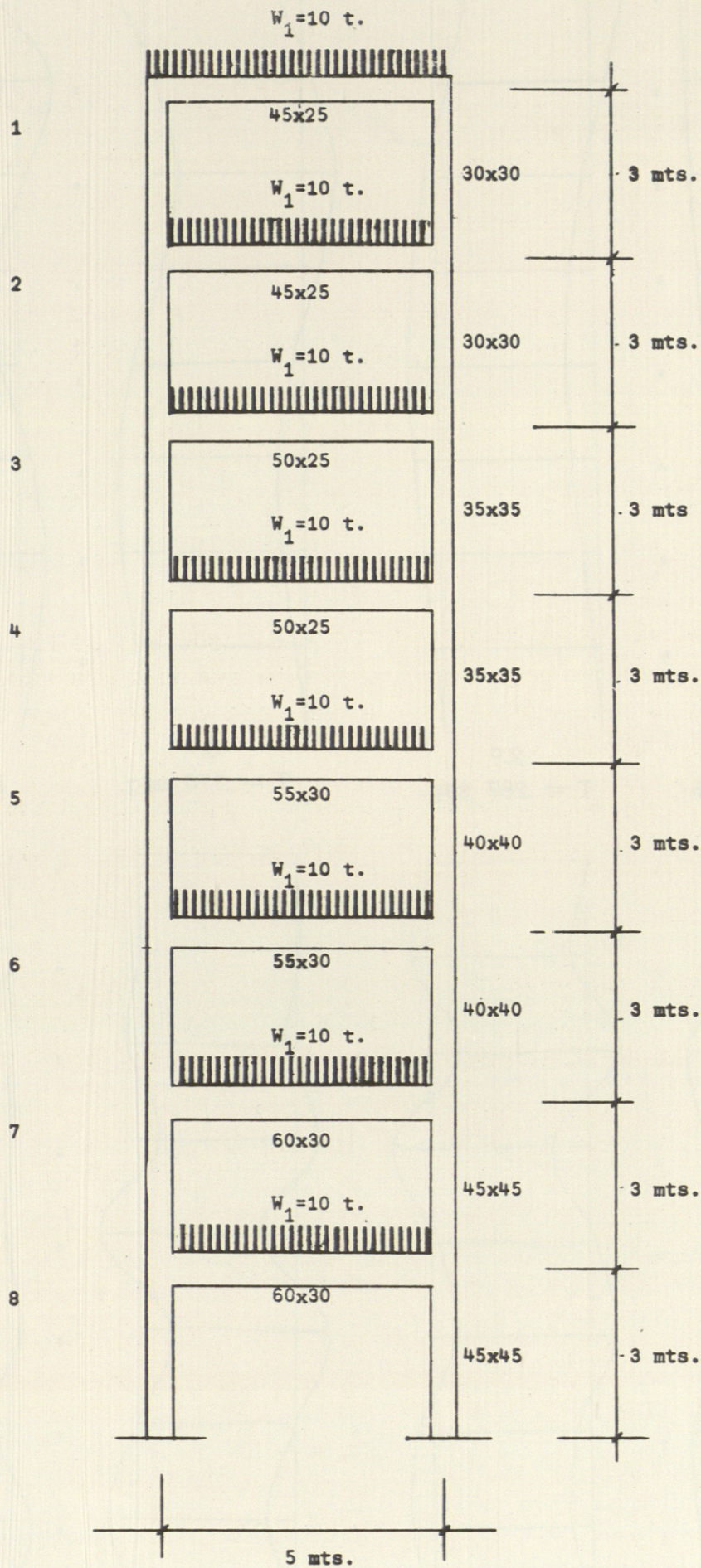
Da la gráfica de la deformada por PLOTTER de cada uno de los modos normales o en su caso de la correspondiente a un instante de tiempo de la vibración forzada. ILA es un indicador que se incrementa en una unidad cada vez que dibuja un modo (se había puesto a uno en el PORTGE).

- Si se quiere hacer el estudio de la vibración forzada con el SWITCH 2 en ON entrará en ARAREM, si no habrá terminado el programa.

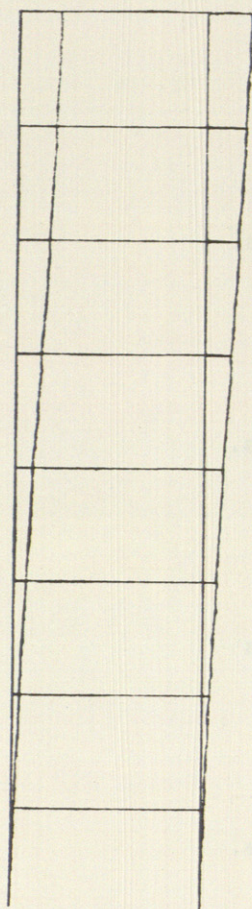
ARAREM

Se calculan los desplazamientos para cada instante de tiempo. Apareciendo en una fila dicho instante y los desplazamientos de cada una de las plantas, incluso apoyo. Se leen las plantas de arriba abajo consecutivamente y en ese mismo orden aparecen en la fila.

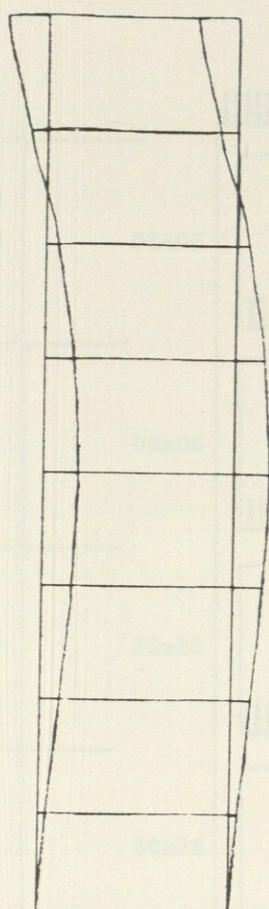
- Si se quiere dibujar la deformada de la estructura en un cierto instante, el SWITCH 2 deberá estar en ON.



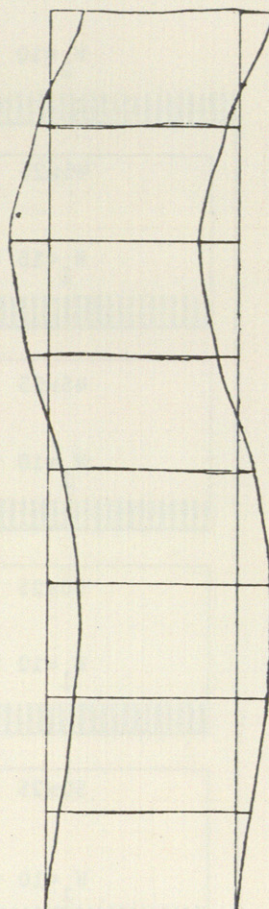
FORMAS NORMALES DE VIBRACION DEL PORTICO



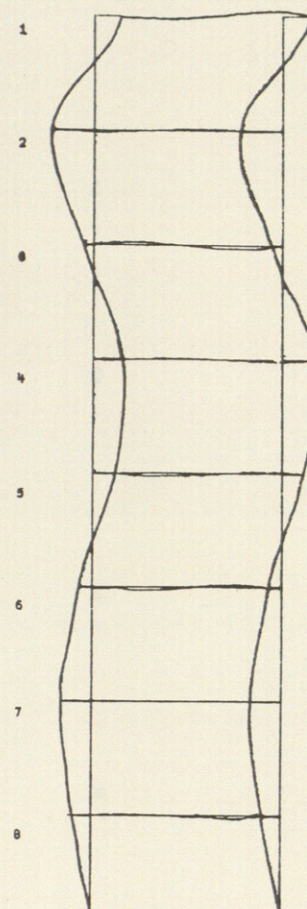
1.^o
Período $T = .759$ seg.
FUNDAMENTAL



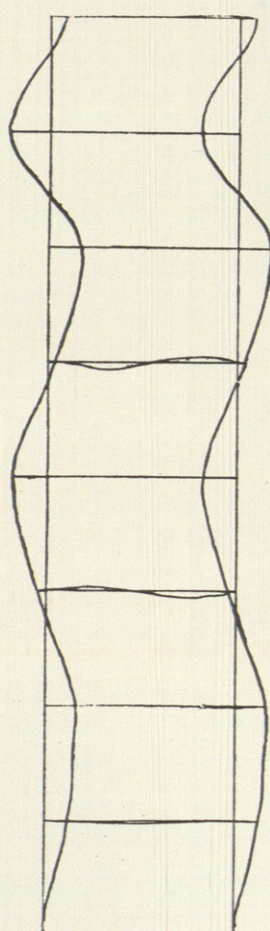
2.^o
 $T = .287$ seg.



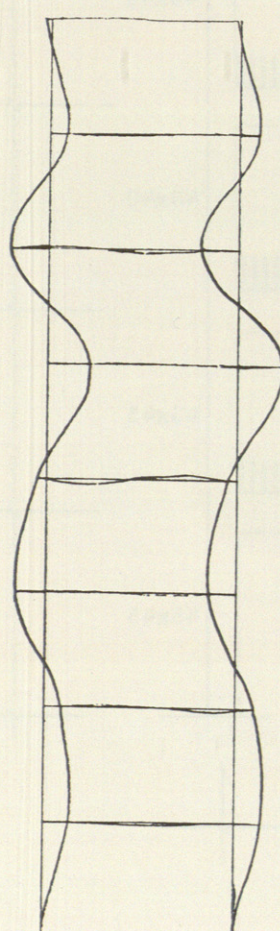
3.^o
 $T = .170$ seg.



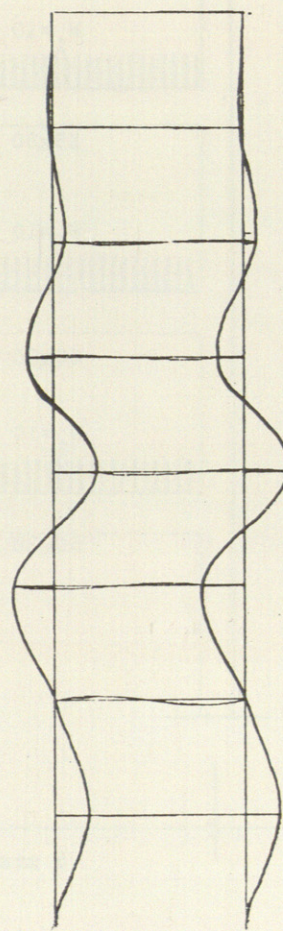
4.^o
 $T = .115$ seg.



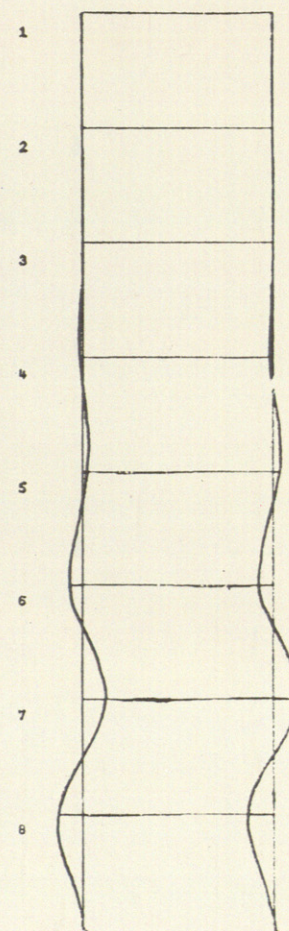
$T = .091$ seg.



$T = .071$ seg.

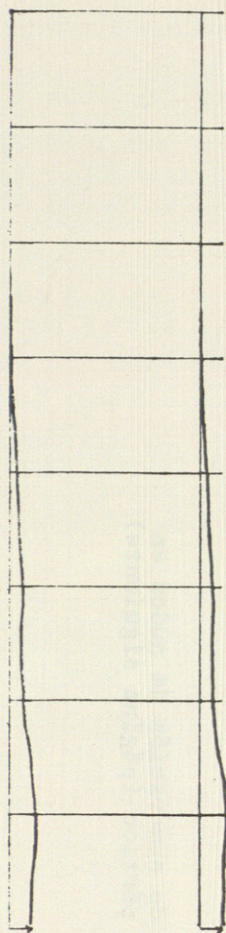


$T = .055$ seg.

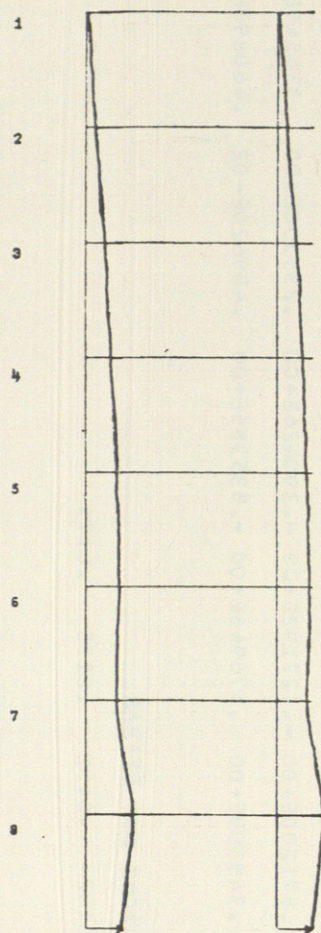


$T = .041$ seg.

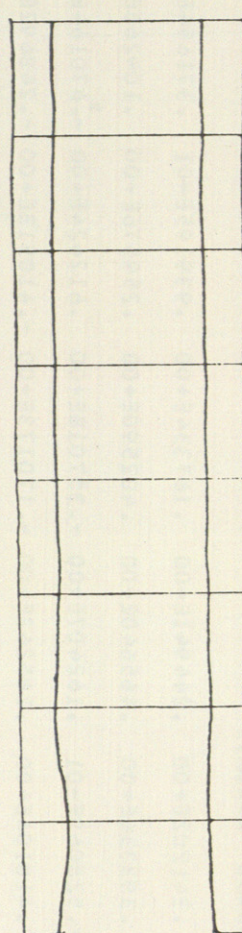
DEFORMADAS POR MOVIMIENTO DEL APOYO



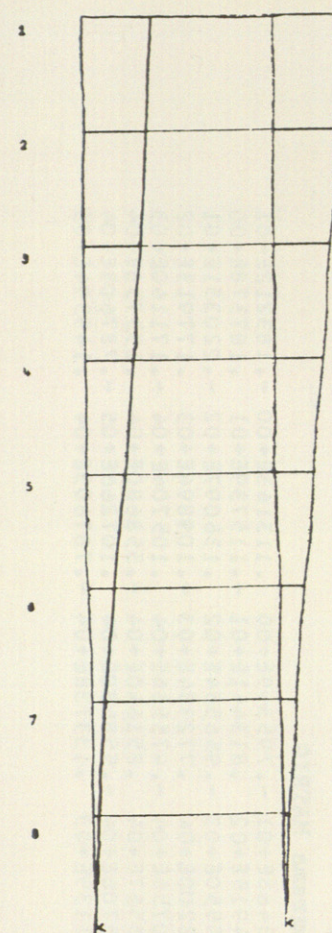
Para $t = .1$ seg.



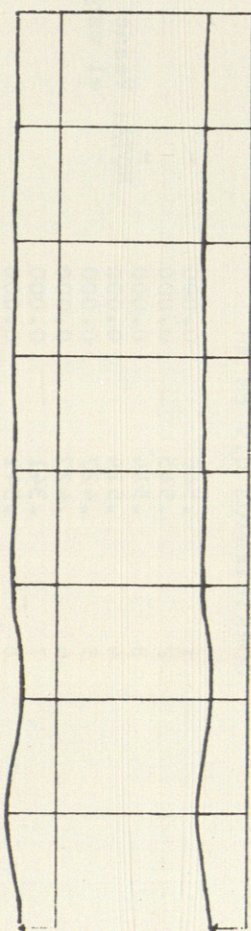
Para $t = .2$ seg.



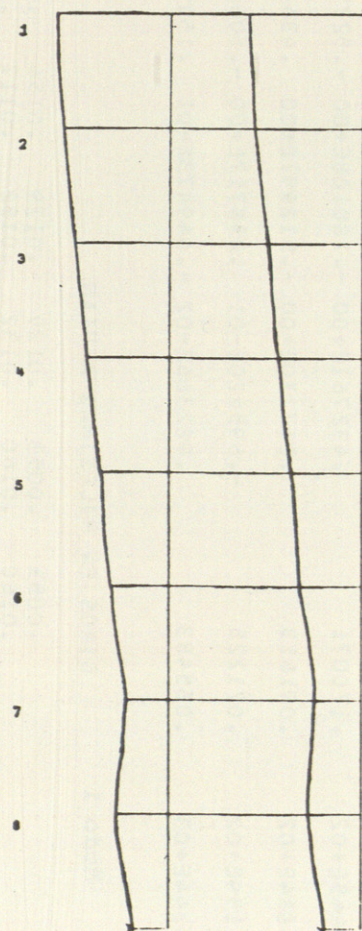
Para $t = .3$ seg.



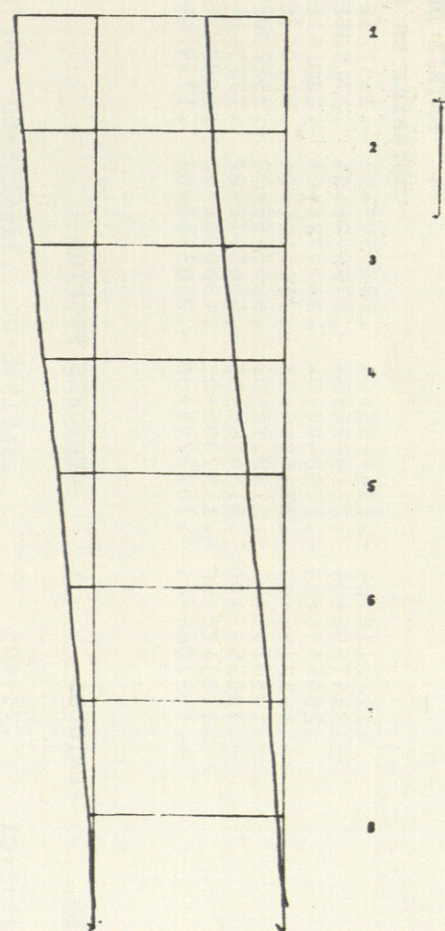
Para $t = .5$ seg.



Para $t = .7$ seg.



Para $t = .8$ seg.



Para $t = .1$ seg.

PORTICO DE OCHO PLANTAS

* RESPUESTA DINAMICA *

Esta tabulación se completa con el dibujo por Plotter de los 8 nudos normales y de las 7 deformadas correspondientes a los instantes marcados con asterisco.

MATRIZ DE RIGIDEZ

Obtenida en el subprograma MATRIG.

.112111E+04	-.134769E+04	.258559E+03	-.363223E+02	.503488E+01	-.795349E+00	.113163E+00	-.183212E-01
-.134769E+04	.281903E+04	-.179849E+04	.371508E+03	-.514915E+02	.813441E+01	-.115739E+01	.187378E+00
.258557E+03	-.179849E+04	.381972E+04	-.280141E+04	.605550E+03	-.956554E+02	.136097E+02	-.220351E+01
-.363218E+02	.371506E+03	-.280140E+04	.511057E+04	-.332200E+04	.772354E+03	-.109894E+03	.177913E+02
.503483E+01	-.514919E+02	.605546E+03	-.332200E+04	.660756E+04	-.475556E+04	.105704E+04	-.171140E+03
-.795358E+00	.813446E+01	-.956547E+02	.772348E+03	-.475557E+04	.851640E+04	-.558680E+04	.133738E+04
.113162E+00	-.115739E+01	.136096E+02	-.109893E+03	.105706E+04	-.558680E+04	.107266E+05	-.787603E+04
-.183206E-01	.187379E+00	-.220351E+01	.177914E+02	-.171139E+03	.133738E+04	-.787603E+04	.149394E+05

VALORES	PERIODOS	Y	VECTORES PROPTOS	Obtenidos ZVILAV.						
.827383E+01	.759405		.565157E+00	.514425E+00	.427049E+00	.341202E+00	.244941E+00	.167334E+00	.939195E-01	.371654E-01
.218411E+02	.267677		-.534523E+00	-.227216E+00	.175389E+00	.393336E+00	.465640E+00	.402590E+00	.259576E+00	.109263E+00
.149855E+03	.041928		.512358E-03	-.300161E-02	.155073E-01	-.528069E-01	.162407E+00	-.357018E+00	.612424E+00	-.670164E+00
.544239E+02	.115449		.369501E+00	-.556900E+00	-.137238E+00	.418106E+00	.285262E+00	-.170173E+00	-.410513E+00	-.248692E+00
.369445E+02	.170071		.432761E+00	-.180108E+00	-.527165E+00	-.269921E+00	.205306E+00	.428490E+00	.387594E+00	.185895E+00
.685834E+02	.091613		.217170E+00	-.512997E+00	.434808E+00	.105545E+00	-.453070E+00	-.108892E+00	.394365E+00	.312804E+00
.882159E+02	.071225		-.695620E-01	.238717E+00	-.506862E+00	.571200E+00	-.127192E+00	-.390426E+00	.235530E+00	.334549E+00
.113244E+03	.055483		.982366E-02	-.449473E-01	.157926E+00	-.349309E+00	.576946E+00	-.535385E+00	.489620E-02	.460896E+00

Modo 1

GIROS EN MILESIMAS RADIAN

Obtenidos por DEFBAR.

.0053	.0053	.0129	.0129	.0156	.0156	.0192	.0192	.0175	.0175
.0160	.0160	.0132	.0132	.0117	.0117	.0117	.0117		

CORRIMIENTOS U,V EN MM

1	.565	0.000
2	.565	0.000
3	.514	0.000
4	.514	0.000
5	.427	0.000
6	.427	0.000
7	.341	0.000
8	.341	0.000
9	.244	0.000
10	.244	0.000
11	.167	0.000
12	.167	0.000
13	.093	0.000
14	.093	0.000
15	.037	0.000
16	.037	0.000

NOTA: Vease la clave de numeración de nudos en el esquema del pórtico (página siguiente)

MOD0 1 BARRA FMI FMD CORT

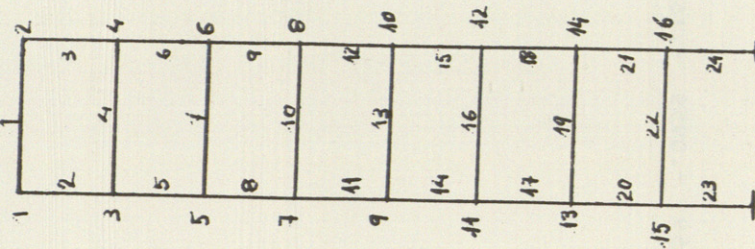
1	.343910E+02	.343913E+02	.137564E+02
2	-.247886E+02	-.343938E+02	-.197274E+02
3	-.247890E+02	-.343938E+02	-.197276E+02
4	.830163E+02	.830159E+02	.332064E+02
5	-.547790E+02	-.582320E+02	-.376703E+02
6	-.547800E+02	-.582330E+02	-.376710E+02
7	.137855E+03	.137855E+03	.551420E+02
8	-.746560E+02	-.830740E+02	-.525766E+02
9	-.746570E+02	-.830750E+02	-.525773E+02
10	.169409E+03	.169409E+03	.677636E+02
11	-.987820E+02	-.947510E+02	-.645110E+02
12	-.987830E+02	-.947520E+02	-.645116E+02
13	.205372E+03	.205371E+03	.821486E+02
14	-.112584E+03	-.106583E+03	-.730556E+02
15	-.112585E+03	-.106584E+03	-.730563E+02
16	.225386E+03	.225386E+03	.901544E+02
17	-.123843E+03	-.112808E+03	-.788836E+02
18	-.123842E+03	-.112808E+03	-.788833E+02
19	.242337E+03	.242338E+03	.969350E+02
20	-.127993E+03	-.118503E+03	-.821653E+02
21	-.127994E+03	-.118503E+03	-.821656E+02
22	.215342E+03	.215342E+03	.861368E+02
23	-.163052E+03	-.873470E+02	-.834663E+02
24	-.163053E+03	-.873480E+02	-.834670E+02

Tiempos, amortiguamientos en cada modo y desplazamientos absolutos.

Obtenidos por ARAREM.

.025	.99482	.98643	.91051	.96657	.97720	.95803	.94624	.93157
.050	.225397E-04	.231997E-04	.105198E-03	-.362995E-03	.484194E-02	-.261556E-01	.147207E-01	.586588E+00
.075	.98455	.95984	.75483	.90302	.93315	.87930	.84725	.80845
.100	.309036E-03	.620992E-04	.238597E-02	.167097E-02	-.591852E-01	.175495E+00	.426177E+00	.164086E+01
	.97439	.93396	.62578	.84366	.89108	.80704	.75862	.70161
	.910899E-03	.490854E-02	-.117298E-02	-.523663E-01	.167312E+00	.782690E+00	.119388E+01	.257314E+01
	.96433	.90879	.51879	.78820	.85092	.74072	.67926	.60888
	.695461E-02	.449964E-02	-.675771E-01	.169700E+00	.860490E+00	.161452E+01	.183974E+01	.351510E+01
								.293892E+01

Numeración de nudos y barras.



Tiempo

Tabulación de TFCADI.

T = .100 BARRA	FMI	FMD	CORT
1	-.693095E+01	-.693098E+01	-.277238E+01
2	.211068E+02	.693890E+01	.934856E+01
3	.211062E+02	.693860E+01	.934826E+01
4	.647926E+02	.647922E+02	.259168E+02
5	-.118755E+03	-.859018E+02	-.682186E+02
6	-.118755E+03	-.859020E+02	-.682190E+02
7	-.139270E+03	-.139270E+03	-.557080E+02
8	.696800E+02	.258013E+03	.109231E+03
9	.696870E+02	.258017E+03	.109234E+03
10	-.845222E+03	-.845222E+03	-.338088E+03
11	.603490E+03	.77520E+03	.459670E+03
12	.603500E+03	.77520E+03	.459673E+03
13	-.198328E+04	-.198328E+04	-.793312E+03
14	.176988E+04	.137978E+04	.104988E+04
15	.176988E+04	.137978E+04	.104988E+04
16	-.101091E+04	-.101091E+04	-.404364E+03
17	-.155704E+04	-.758960E+03	-.772000E+03
18	-.155703E+04	-.758950E+03	-.771993E+03
19	-.494867E+04	-.494867E+04	-.197946E+04
20	.746810E+04	.650580E+04	.465796E+04
21	.746810E+04	.650580E+04	.465796E+04
22	-.221158E+04	-.221157E+04	-.884630E+03
23	-.447902E+04	-.525652E+04	-.324518E+04
24	-.447901E+04	-.525651E+04	-.324517E+04

Flectores. Cortantes. giros v recorridos para T = 0,1 seg.

Tabulación por GRADEF.

GIROS EN MILESIMAS RADIAN

-.0010	-.0010	.0100	.0100	-.0158	-.0158	-.0959	-.0959	-.1690	-.1690
-.0718	-.0718	-.2708	-.2708	-.1210	-.1210				

CORRIMIENTOS U,V EN MM

1	-2.931	0.000
2	-2.931	0.000
3	-2.934	0.000
4	-2.934	0.000
5	-3.006	0.000
6	-3.006	0.000
7	-2.769	0.000
8	-2.769	0.000
9	-2.078	0.000
10	-2.078	0.000
11	-1.324	0.000
12	-1.324	0.000
13	-1.099	0.000
14	-1.099	0.000
15	.576	0.000
16	.576	0.000

.125	.179754E-01	.85429	.43009	.15638	.81256	.67985	.60820	.52841	.353552E+01
.150	.210033E-01	.86046	.35656	.68797	.77593	.62398	.54457	.45857	.404508E+01
.175	.635253E-01	.83726	.29559	.64274	.74095	.57271	.48760	.39797	.445501E+01
.200	.222167E+00	.81469	.24506	.60049	.70755	.384860E+01	.362367E+01	.569097E+01	.475527E+01
.225	.112152E+01	.79273	.20316	.56101	.67566	.48245	.39092	.29973	.493843E+01
.250	.251660E+01	.77137	.16842	.52413	.64520	.44280	.35002	.26011	.500000E+01
.275	.409206E+01	.75057	.13963	.48968	.61612	.40641	.31340	.22574	.493844E+01
.300	.564804E+01	.73034	.11575	.45749	.58834	.37301	.28062	.19590	.475529E+01
.325	.709109E+01	.71065	.09596	.42741	.56182	.34236	.25126	.17001	.445504E+01
.350	.831911E+01	.69150	.07955	.39931	.53650	.22497	.14754	.09643	.404510E+01
.375	.923926E+01	.67286	.06595	.37306	.51231	.28841	.20144	.12804	.353555E+01
.400	.983889E+01	.65472	.05468	.34854	.48922	.26471	.18036	.11112	.293894E+01
.425	.101460E+02	.63707	.04533	.32562	.46717	.24295	.16150	.09643	.226996E+01
.450	.101432E+02	.61990	.03758	.30422	.44611	.22299	.14460	.08369	.154510E+01
.475	.979519E+01	.60319	.03115	.28422	.42600	.20466	.12947	.07263	.782185E+00
.500	.910338E+01	.58693	.02582	.26553	.40679	.18784	.11593	.06303	.100000E-04
.525	.811351E+01	.57111	.02141	.24808	.38846	.17241	.10380	.05470	-.782110E+00
.550	.690578E+01	.55572	.01775	.23177	.37095	.15824	.09294	.04747	-.154502E+01
.575	.552327E+01	.54074	.01471	.21653	.35422	.14523	.08322	.04119	-.226990E+01
.600	.389521E+01	.52616	.01220	.20230	.33826	.13330	.07451	.03575	-.293888E+01
.625	.190569E+01	.51198	.01011	.18900	.32301	.12234	.06672	.03102	-.353549E+01
.650	.63563E+00	.49818	.00838	.17657	.30845	.11229	.05974	.02692	-.404505E+01
.675	.310421E+01	.48475	.00695	.16496	.29454	.10306	.05349	.02336	-.445500E+01
.700	.585907E+01	.47402	.00477	.15412	.28127	.09459	.04789	.02028	-.475526E+01
.725	.857402E+01	.46660	.00396	.13452	.25648	.07968	.03839	.01527	-.493843E+01
.750	.110887E+02	.45897	.00277	.12399	.26859	.08682	.04288	.01759	-.500000E+01
.775	.132511E+02	.44660	.00396	.13452	.25648	.07968	.03839	.01527	-.493844E+01
.800	.149694E+02	.43456	.00328	.12568	.24492	.07314	.03438	.01325	-.475529E+01
.825	.162094E+02	.42285	.00272	.11741	.23388	.06713	.03078	.01150	-.445505E+01
.850	.169434E+02	.41145	.00225	.10970	.22334	.06161	.02756	.00998	-.621650E+01
		.40036	.00187	.10248	.21327	.05655	.02468	.00866	
		.158732E+02	-.138692E+02	-.119384E+02	-.974691E+01	-.813320E+01	-.589479E+01	-.621650E+01	-.404510E+01

NOTA: Para cada línea con asterisco hay una deformada trazada por Plotter.

Tiempo, amortiguamientos de cada modo y desplazamientos absolutos.

Obtenidos por ARAREM.

.69911	.38956	.00155	.09575	.20365	.05190	.02209	.00751
.875	-.171357E+02	-.159630E+02	-.139785E+02	-.120376E+02	-.977629E+01	-.801846E+01	-.568045E+01
.69190	.37906	.00128	.08945	.19447	.04763	.01978	.00652
.900	-.167690E+02	-.156217E+02	-.136828E+02	-.117585E+02	-.947427E+01	-.762857E+01	-.527575E+01
.68475	.36885	.00106	.08357	.18571	.04372	.01771	.00566
.925	-.158669E+02	-.148199E+02	-.129771E+02	-.110717E+02	-.879100E+01	-.693096E+01	-.405758E+01
.67769	.35891	.00088	.07808	.17734	.04013	.01586	.00491
.950	-.144915E+02	-.135628E+02	-.118260E+02	-.997028E+01	-.775042E+01	-.594189E+01	-.388077E+01
.67069	.34923	.00073	.07294	.16934	.03683	.01420	.00426
.975	-.127123E+02	-.118519E+02	-.102188E+02	-.847323E+01	-.640544E+01	-.471507E+01	-.292359E+01
.66377	.33982	.00060	.06815	.16171	.03380	.01271	.00370
1.000	-.105656E+02	-.971672E+01	-.819554E+01	-.662795E+01	-.480650E+01	-.331554E+01	-.187118E+01
1.000	BARRA	FMI	FMD	CORT			

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

1	-.571330E+03	-.571333E+03	-.228532E+03
2	.403960E+03	.571330E+03	.325096E+03
3	.403970E+03	.571320E+03	.325096E+03
4	-.141858E+04	-.141858E+04	-.567432E+03
5	.939700E+03	.101471E+04	.651470E+03
6	.939710E+03	.101472E+04	.651476E+03
7	-.246683E+04	-.246682E+04	-.986730E+03
8	.134325E+04	.152715E+04	.956800E+03
9	.134326E+04	.152716E+04	.956806E+03
10	-.315616E+04	-.315616E+04	-.126246E+04
11	.186963E+04	.181289F+04	.122750E+04
12	.186963E+04	.181289E+04	.122750E+04
13	-.391780E+04	-.391780E+04	-.156712E+04
14	.213573E+04	.204828E+04	.139467E+04
15	.213574E+04	.204827E+04	.139467E+04
16	-.439442E+04	-.439442E+04	-.175776E+04
17	.248130E+04	.225880E+04	.158003E+04
18	.248129E+04	.225880E+04	.158003E+04
19	-.469145E+04	-.469144E+04	-.187657E+04
20	.234437E+04	.221034E+04	.151823E+04
21	.234436E+04	.221033E+04	.151823E+04
22	-.431017E+04	-.431017E+04	-.172406E+04
23	.348124E+04	.196596E+04	.181573F+04
24	.348124E+04	.196596E+04	.181573E+04

FLECTORES. Cortantes, giros y recorridos para T=1seg. (última línea)

GIROS EN MILESIMAS RADIAN

1	-.0889	-.0889	-.2208	-.2208	-.2799	-.2799	-.3581	-.3581	-.3340
2	-.3122	-.3122	-.2567	-.2567	-.2358	-.2358			

CORRIMIENTOS U,V EN MM

1	-10.565	0.000
2	-10.565	0.000
3	-9.716	0.000
4	-9.716	0.000
5	-8.195	0.000
6	-8.195	0.000
7	-6.627	0.000
8	-6.627	0.000
9	-4.806	0.000
10	-4.806	0.000
11	-3.315	0.000
12	-3.315	0.000
13	-1.871	0.000
14	-1.871	0.000
15	-.777	0.000
16	-.777	0.000

Resultados gráficos en la última deformada, 7a. de la serie.

EVALUACION DEL SISMO

Para la definición del movimiento de apoyo originado por un sismo se ha considerado la representación de la oscilación sísmica mediante una curva senoidal modulada y tras diversos ensayos, la función que define dicho movimiento se la ha hecho depender de tres parámetros: el período del movimiento o pulsación W , la semiamplitud A de la oscilación máxima y la duración de los movimientos fuertes definida por el parámetro n .

Se ha llegado a la siguiente fórmula

$$\underline{X(t) = n e^{-nt} A \sin W t}$$

Que es el producto de una función armónica por una función moduladora y cuyo máximo alcanza el valor unidad para $t = 1/n$. Este valor en la estimación adoptada se considera que se produce durante un tiempo que es la cuarta parte de la duración de movimientos fuertes del sismo que se considere. Así, definidos los parámetros: duración del sismo D , semiamplitud A , y el período o en su caso la pulsación W : se llega en función de estos parámetros a la fórmula definitiva.

$$\underline{X(t) = (4/D) e^{-(4/D)t} A \sin W t}$$

Para hacer más visible el tipo de oscilaciones adoptado se ha considerado la excitación definida por los siguientes parámetros:

$$D = 20 \text{ sg.}$$

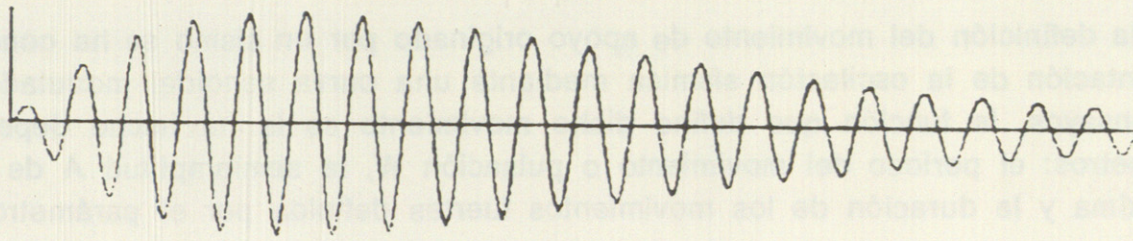
$$A = 2 \text{ cm.}$$

$$T = 1 \text{ sg.}$$

Mediante un pequeño programa con salida por plotter se obtiene la curva de oscilaciones dependiente del tiempo. Consideramos que mediante esos tres parámetros se puede evaluar una gama amplia de sismos tóricos susceptibles de ser tratados por los programas REMARA o ARAREM.

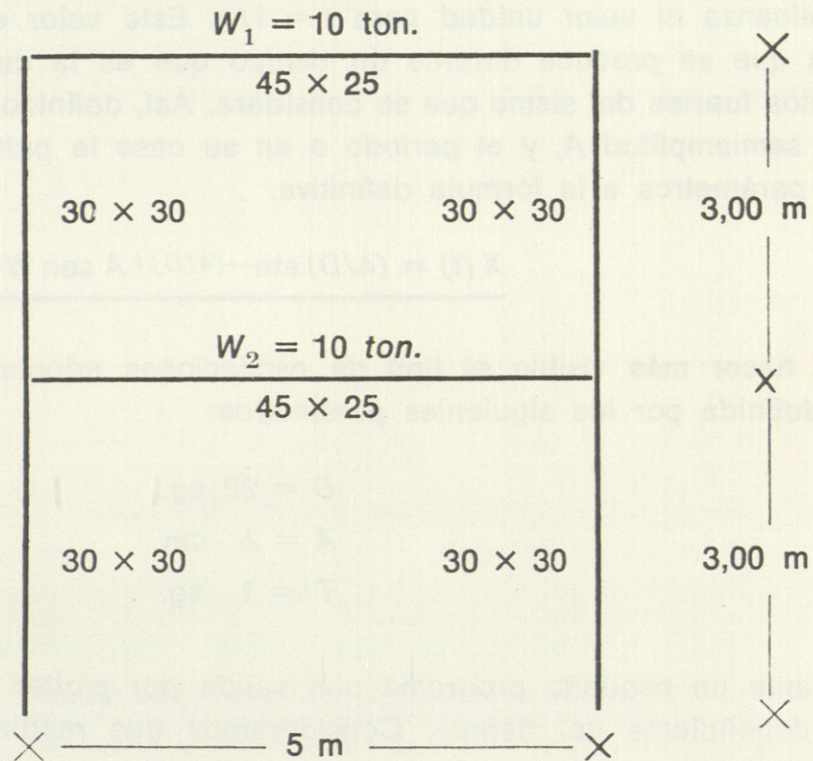
Así, este tipo de curva se ha considerado en la oscilación del cimiento para obtener la respuesta dinámica del pórtico de dos plantas, y de la que se presentan en salida por impresora los resultados obtenidos de los desplazamientos para instantes sucesivos de tiempo.

El movimiento así definido carece de desplazamiento y velocidad inicial, por lo que permite prescindir de la vibración libre producida por el estado inicial de desplazamientos y velocidades.



$$y = n e t e^{-\pi t} A \sin w t$$

OSCILACION SISMICA
PARA PORTICO A DOS
PANTAS



$$\text{Pórtico: Modos} \left\{ \begin{array}{l} w_1 = 19.988 \text{ rad. seg}^{-1} \\ T_1 = .314 \text{ seg.} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} w_2 = 60.529 \text{ rad seg}^{-1} \\ T_2 = .104 \text{ seg.} \end{array} \right.$$

Sismo: Ampl = 5 mm. $T = .35 \text{ seg.}$ Duración = 8 seg.
(Próximo a resonancia.)

PORTICO DE 2 PLANTAS. RESPUESTA A UNA ACCION SISMICA POR REMARA

1

FFXEQS REMARA (con 3 en col 28 para callar a partir de 8100)

IND = 2

DT NM AMPL.

VIBRACION DE APOYO EN PORTICO DE 2 PLANTAS 15.6.73

.025 2 .005

VECTOR R3

LEY DE EXCITACION EN APOYOS

ER F8 —.165172E + 04

$x = \text{ent } e^{-n t} A \text{ sen } \Omega t$

244.220

VALOR Y SU VECTOR PROPIO

PESO DE LAS MASAS

19.900 .877 .459

10.000 10.000

60.529 —.459 .877

COEF. DE AMORTIGUAMIENTO (5 % de ω_i)

.100000 E + 01 .000000 E — 99

.000000 E — 99 .100000 E + 01

.997

3.025

NMAX = 92

AMORT = .102

T	X1		X2		X3	X4	X5
.025	0.000		.008		.072		
		— .009		— .064			
.050	— .004		.081		.259		
		— .085		— .177			
.075	.023		.259		.478		
		— .235		— .218			
.100	.161		.475		<u>.630</u>		
		— .313		— .155			
.125	.446		.626		.623		
		— .179		.002			
.150	.802		<u>.674</u>		.410		
		.127		.264			
.175	1.069		.599		0.000		
		.470		.599			
.200	<u>1.089</u>		.332		— .533		
		.756		.866			
.225	.740		— .172		— 1.068		
		.912		.896			
.250	— .031		— .847		— 1.461		
		.816		.614			
.275	— 1.155		— 1.531		<u>— 1.587</u>		
		.376		.056			
.300	— 2.390		— 2.057		— 1.37		
		— .333		— .685			
.325	— 3.374		<u>— 2.272</u>		— .814		
		— 1.102		— 1.457			
.350	<u>— 3.742</u>		— 2.028		0.000		
		— 1.714		— 2.028			
.375	— 3.232		— 1.237		.916		
		— 1.994		— 2.153			
.400	— 1.758		.035		1.739		
		— 1.794		— 1.704			
.425	.519		1.563		2.276		
		— 1.044		— .712			
.450	3.177		3.030		<u>2.380</u>		
		.146		.650			
.475	5.593		4.095		1.990		
		1.498		2.105			

.500	7.106		<u>4.438</u>		<u>1.148</u>	1.325	— 21.303		— 13.757		— 4.526
		2.667		3.289				— 7.545		— 9.231	
.525	<u>7.185</u>		3.838		<u>0.000</u>	1.350	<u>— 25.444</u>		<u>— 15.460</u>		— 3.652
		3.346		3.838				— 9.983		— 11.808	
.550	5.577		2.280		— 1.231	1.375	— 24.313		— 13.971		— 2.039
		3.297		3.511				— 10.341		— 11.932	
.575	2.407		— .008		— 2.291	1.400	— 18.009		— 9.516		0.000
		2.416		2.282				— 8.493		— 9.515	
.600	— 1.789		— 2.600		— 2.944	1.425	— 7.737		— 2.952		2.059
		.810		.344				— 4.785		— 5.012	
.625	— 6.144		— 4.955		<u>— 3.029</u>	1.450	4.416		4.389		3.730
		— 1.189		— 1.925				.027		.659	
.650	— 9.641		— 6.516		— 2.495	1.475	15.920		10.985		4.674
		— 3.125		— 4.021				4.934		6.311	
.675	<u>— 11.358</u>		<u>— 6.829</u>		— 1.420	1.500	24.325		15.436		<u>4.694</u>
		— 4.529		— 5.408				8.889		10.741	
.700	— 10.692		— 5.674		<u>0.000</u>	1.525	<u>27.792</u>		<u>16.764</u>		3.780
		— 5.018		— 5.674				11.028		12.984	
.725	— 7.533		— 3.159		<u>1.487</u>	1.550	25.495		14.630		2.106
		— 4.373		— 4.647				10.865		12.524	
.750	— 2.349		.285		— 2.738	1.575	17.817		9.415		0.000
		— 2.635		— 2.452				8.401		9.415	
.775	3.866		3.992		<u>3.485</u>	1.600	6.282		2.156		— 2.119
		— .125		.507				4.125		4.276	
.800	9.792		7.170		<u>3.552</u>	1.625	— 6.743		— 5.664		— 3.830
		2.622		3.617				— 1.078		— 1.834	
.825	14.057		9.067		2.901	1.650	— 18.548		— 12.428		— 4.790
		4.989		6.165				— 6.120		— 7.637	
.850	<u>15.563</u>		<u>9.156</u>		1.638	1.675	— 26.644		— 16.712		<u>— 4.802</u>
		6.406		7.517				— 9.931		— 11.910	
.875	13.749		7.276		<u>0.000</u>	1.700	<u>— 29.294</u>		<u>— 17.597</u>		— 3.860
		6.473		7.275				— 11.697		— 13.736	
.900	8.766		3.694		— 1.691	1.725	— 25.802		— 14.856		— 2.147
		5.072		5.386				— 11.026		— 12.708	
.925	1.499		— .929		— 3.094	1.750	— 17.062		— 9.020		0.000
		2.428		2.165				— 8.042		— 9.019	
.950	— 6.592		— 5.666		— 3.914	1.775	— 4.619		— 1.265		2.154
		— .925		— 1.751				— 3.353		— 3.419	
.975	— 13.767		— 9.492		<u>— 3.967</u>	1.800	8.883		6.818		3.887
		— 4.275		— 5.525				2.065		2.930	
1.000	— 18.388		<u>— 11.519</u>		— 3.222	1.825	20.647		13.564		4.854
		— 6.868		— 8.297				7.083		8.709	
1.025	<u>— 19.284</u>		— 11.203		— 1.810	1.850	28.222		17.572		<u>4.860</u>
		— 8.080		— 9.392				10.650		12.711	
1.050	— 16.047		— 8.483		<u>0.000</u>	1.875	<u>30.013</u>		<u>17.997</u>		3.901
		— 7.563		— 8.482				12.016		14.095	
1.075	— 9.161		— 3.815		1.851	1.900	25.626		14.732		2.167
		— 5.346		— 5.666				10.893		12.565	
1.100	.052		1.899		3.371	1.925	15.941		8.432		0.000
		— 1.846		— 1.472				7.508		8.432	
1.125	9.701		7.486		4.246	1.950	2.943		.379		— 2.168
		2.215		3.239				2.563		2.547	
1.150	17.708		11.739		<u>4.287</u>	1.975	— 10.692		— 7.777		— 3.908
		5.968		7.452				— 2.915		— 3.869	
1.175	<u>22.266</u>		<u>13.691</u>		3.469	2.000	— 22.157		— 14.366		— 4.874
		8.574		10.222				— 7.790		— 9.492	
1.200	22.243		12.830		1.942	2.025	— 29.093		<u>— 18.036</u>		<u>— 4.874</u>
		9.412		10.888				— 11.057		— 13.161	
1.225	17.459		9.227		<u>0.000</u>	2.050	<u>— 30.073</u>		— 18.031		— 3.908
		8.232		9.226				— 12.041		— 14.122	
1.250	8.766		3.541		— 1.972	2.075	— 24.900		— 14.352		— 2.168
		5.225		5.513				— 10.547		— 12.184	
1.275	— 2.106		— 3.094		— 3.580	2.100	— 14.641		— 7.751		— .001
		.988		.486				— 6.890		— 7.750	
1.300	— 12 900		— 9.303		— 4.496	2.125	— 1.406		.424		2.164
		— 3.597		— 4.807				— 1.830		— 1.740	

2.150	12.087		8.503		3.898
		3.548		4.605	
2.175	23.083		14.841		<u>4.856</u>
		8.241		9.985	
2.200	29.347		<u>18.156</u>		4.852
		11.191		13.304	
2.225	<u>29.621</u>		17.781		3.886
		11.839		13.894	
2.250	23.876		13.807		2.154
		10.069		11.652	
2.275	13.315		7.055		.001
		6.260		7.054	
2.300	.107		— 1.095		— 2.146
		1.202		1.050	
2.325	— 13.047		— 8.986		— 3.862
		— 4.061		— 5.124	
2.350	— 23.489		— 15.027		<u>— 4.807</u>
		— 8.462		— 10.219	
2.375	<u>— 29.125</u>		<u>— 18.009</u>		— 4.799
		— 11.115		— 13.210	
2.400	— 28.846		— 17.349		— 3.841
		— 11.497		— 13.508	
2.425	— 22.748		— 13.199		— 2.127
		— 9.548		— 11.071	
2.450	— 12.098		— 6.416		0.000
		— 5.682		— 6.415	
2.475	.923		1.619		— 2.116
		— .696		— .496	
2.500	13.673		9.282		3.804
		4.390		5.478	
2.525	23.583		15.034		<u>4.733</u>
		8.548		10.301	
2.550	<u>28.678</u>		<u>17.730</u>		4.721
		10.947		13.009	
2.575	27.965		16.849		3.776
		11.115		13.073	
2.600	21.631		12.591		2.090
		9.039		10.501	
2.625	10.991		5.834		0.000
		5.156		5.833	
2.650	— 1.782		— 2.048		— 2.076
		.266		.027	
2.675	— 14.102		— 9.466		— 3.730
		— 4.635		— 5.736	
2.700	— 23.496		— 14.935		<u>— 4.637</u>
		— 8.561		— 10.298	
2.725	<u>— 28.101</u>		<u>— 17.372</u>		— 4.622
		— 10.729		— 12.750	
2.750	— 27.030		— 16.312		— 3.694
		— 10.717		— 12.617	
2.775	— 20.541		— 11.993		— 2.043
		— 8.548		— 9.949	
2.800	— 9.984		— 5.304		0.000
		— 4.679		— 5.304	
2.825	2.490		2.394		2.027
		.096		.366	
2.850	14.363		9.554		3.641
		4.809		5.913	
2.875	23.259		14.747		<u>4.524</u>
		8.512		10.223	
2.900	<u>27.420</u>		<u>16.950</u>		4.507
		10.470		12.443	
2.925	26.054		15.746		3.600
		10.307		12.145	
2.950	19.483		11.406		1.990
		8.077		9.415	

2.975	9.069		4.823		0.000
		4.245		4.822	
3.000	— 3.068		— 2.667		— 1.973
		769' —		007' —	
3.025	— 14.482		— 9.561		— 3.540
		— 4.921		— 6.020	
3.050	— 22.896		— 14.485		— 4.397
		— 8.411		— 10.088	
3.075	<u>— 26.656</u>		<u>— 16.476</u>		— 4.378
		— 10.180		— 12.097	
3.100	— 25.052		— 15.161		— 3.496
		— 9.891		— 11.665	
3.125	— 18.457		— 10.834		— 1.932
		— 7.623		— 8.901	
3.150	— 8.237		— 4.385		— .001
		— 3.852		— 4.384	
3.175	3.531		2.878		1.912
		.653		.965	
3.200	14.480		9.499		3.431
		4.981		6.067	
3.225	22.430		14.164		<u>4.259</u>
		8.266		9.904	
3.250	<u>25.826</u>		<u>15.962</u>		4.240
		9.863		11.722	
3.275	24.035		14.563		3.384
		9.472		11.178	
3.300	17.467		10.277		1.869
		7.190		8.407	
3.325	7.480		3.986		.001
		3.494		3.985	
3.350	— 3.895		— 3.034		— 1.849
		— .060		— 1.185	
3.375	— 14.375		— 9.380		— 3.316
		— 4.995		— 6.064	
3.400	— 21.882		— 13.795		<u>— 4.114</u>
		— 8.087		— 9.680	
3.425	<u>— 24.949</u>		<u>— 15.419</u>		— 4.094
		— 9.530		— 11.325	
3.450	— 23.013		— 13.959		— 3.266
		— 9.054		— 10.692	
3.475	— 16.513		— 9.737		— 1.803
		— 6.775		— 7.934	
3.500	— 6.794		— 3.624		— .001
		— 3.169		— 3.623	
3.525	4.173		3.144		1.782
		1.028		1.362	
3.550	14.188		9.215		3.196
		4.972		6.019	
3.575	21.268		13.388		<u>3.964</u>
		7.880		9.424	
3.600	<u>24.038</u>		<u>14.855</u>		3.942
		9.183		10.912	
3.625	21.993		13.354		3.144
		8.639		10.209	
3.650	15.596		9.216		1.735
		6.379		7.480	
3.675	6.168		3.294		0.000
		2.874		3.293	
3.700	— 4.377		— 3.215		— 1.714
		— 1.161		— 1.500	
3.725	— 13.931		— 9.012		— 3.072
		— 4.919		— 5.939	
3.750	— 20.604		— 12.953		<u>— 3.809</u>
		— 7.651		— 9.143	
3.775	<u>— 23.104</u>		<u>— 14.277</u>		— 3.786
		— 8.827		— 10.489	

3.800	— 20.983		— 12.752		— 3.020
		— 8.231		— 9.731	
3.825	— 14.718		— 8.714		— 1.666
		— 6.003		— 7.047	
3.850	— 5.601		— 2.994		0.000
		— 2.607		— 2.993	
3.875	4.517		3.251		1.645
		1.265		1.606	
3.900	13.617		8.778		2.947
		4.839		5.830	
3.925	19.902		12.496		<u>3.653</u>
		7.405		8.843	
3.950	<u>22.158</u>		<u>13.692</u>		— 3.631
		8.466		10.060	
3.975	19.988		12.157		2.894
		7.830		9.263	
4.000	13.877		8.232		1.596
		5.645		6.635	
4.025	5.086		2.721		.001
		2.364		2.720	
4.050	— 4.604		— 3.259		— 1.575
		— 1.344		— 1.684	
4.075	— 13.258		— 8.519		— 2.821
		— 4.738		— 5.698	
4.100	— 19.172		— 12.025		<u>— 3.496</u>
		— 7.146		— 8.529	
4.125	<u>— 21.208</u>		<u>— 13.104</u>		— 3.474
		— 8.103		— 9.630	
4.150	— 19.012		— 11.573		— 2.769
		— 7.438		— 8.804	
4.175	— 13.073		— 7.768		— 1.527
		— 5.304		— 6.241	
4.200	— 4.617		— 2.473		— .001
		— 2.143		— 2.472	
4.225	4.644		3.243		1.505
		1.400		1.737	
4.250	12.863		8.243		2.696
		4.620		5.547	
4.275	18.424		11.545		<u>3.340</u>
		6.879		8.205	
4.300	<u>20.262</u>		<u>12.519</u>		3.318
		7.743		9.200	
4.325	18.059		11.001		2.644
		7.058		8.357	
4.350	12.306		7.325		1.458
		4.981		5.867	
4.375	— 4.191		2.247		.001
		1.943		2.246	
4.400	— 4.644		— 3.206		— 1.436
		— 1.438		— 1.770	
4.425	— 12.442		— 7.953		— 2.571
		— 4.488		— 5.381	
4.450	— 17.669		— 11.062		<u>— 3.185</u>
		6.607		— 7.876	
4.475	<u>— 19.326</u>		<u>— 11.940</u>		— 3.164
		— 7.385		— 8.776	
4.500	— 17.133		— 10.444		— 2.520
		— 6.688		— 7.923	
4.525	— 11.577		— 6.902		— 1.389
		— 4.675		— 5.512	
4.550	— 3.805		— 2.042		0.000
		— 1.762		— 2.041	
4.575	4.613		— 3.153		1.368
		1.439		1.784	

APENDICE MATEMATICO

Solución matricial para pórtico de N plantas.

Sea el caso general de un sistema de $N + 1$ masas correspondientes a los N pisos y cimiento vibrando y $N + 1$ fuerzas impulsivas.

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = f$$

Cuya forma matricial, si se trata de diferenciar el apoyo, es:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline M1 & M2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \ddot{X}f & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline K1 & K2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline Xf & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline C1 & C2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \dot{X}f & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline f_f \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline M3 & M4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \ddot{X}s & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline K3 & K4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline Xs & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline C3 & C4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \dot{X}s & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline f_s \\ \hline \end{array}$$

En nuestro caso por considerar sólo el desplazamiento de pisos y apoyo

$$M2 = M3 = 0$$

Y siendo:

$M1$ = Masa asociada a los apoyos.

$M4$ = Masa correspondiente a la submatriz de pisos (matriz).

Xf = Desplazamiento horizontal de los apoyos.

Xs = Vector de desplazamientos horizontales de pisos.

K = Matriz de rigidez de todo el sistema.

$K4$ = Matriz de rigidez de pisos.

$\dot{X}f$ y $\dot{X}s$ = Velocidad y vector velocidad, de apoyo y pisos.

$\ddot{X}f$ y $\ddot{X}s$ = Aceleración y vector aceleración de apoyo y pisos.

C = Matriz de amortiguamiento del sistema.

$C4$ = Matriz de amortiguamiento debida a pisos.

f_f = Fuerza impulsiva en apoyos.

f_s = Fuerza impulsiva en pisos (matriz-vector).

Las dos ecuaciones matriciales desglosadas, de apoyos y pisos, son:

$$M1\ddot{X}f + K1Xf + K2Xs + C1\dot{X}f + C2\dot{X}s = f_f$$

$$M4\ddot{X}s + K3Xf + K4Xs + C3\dot{X}f + C4\dot{X}s = f_s$$

Y considerando sólo el caso de movimiento de apoyos

$$M4\ddot{X}s + K4Xs + C4\dot{X}s = -C3\dot{X}f - K3Xf = f(t)$$

[0]

La forma de resolverla será como sigue:

1. Resolución de la homogénea:

- a) Despreciando términos no diagonales de $C4$.
- b) Desacoplando las ecuaciones.

2. Resolución de la forzada sumando impulsos.

1. Resolución de la homogénea.

Sea el sistema

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = 0$$

Despreciando el amortiguamiento y tanteando la solución particular

$$X = a \sin w t$$

$$(K - w^2 M) = 0$$

Obteniéndose de esta ecuación matricial tantas pulsaciones w como sistema de ecuaciones o grados de libertad tengamos. Y para cada uno de estos valores obtendré un vector de semiamplitudes a y tantos vectores como grados de libertad haya.

Ortogonalidad y normalización de los modos.

Dadas dos pulsaciones, w_r y w_s , se verificará entre los vectores propios correspondientes

$$K a_r = w_r^2 M a_r$$

premultiplicando por los vectores transpuestos.

$$K a_s = w_s^2 M a_s$$

$$a'_s K a_r = w_r^2 a'_s M a_r \quad \text{pero por ser } K \text{ y } M \text{ simétricas.}$$

$$a'_r K a_s = w_s^2 a'_r M a_s \quad \text{transponiendo la primera.}$$

$$a'_r K' a_s = w_r^2 a'_r M a_s$$

Restando las dos ecuaciones

$$(w_r^2 - w_s^2) a'_r M a_s = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{a'_r M a_s}{a'_r K a_s} = 0$$

y, por lo tanto,

ortogonalidad

$$\underline{a'_r K a_s = 0}$$

Normalidad y ortogonalidad son dos condiciones que no tienen por qué existir simultáneamente (entendiendo la normalidad cuando $\overline{m} = 1$).

Vamos a buscar otro sistema de vectores Φ que sean proporcionales a los a y que cumplan la condición de ortogonalidad. Se verificará:

$$\Phi_i = c_i a_i \quad c_i = \text{constante.}$$

$$\text{Como } a'_r M a_s = 0 \quad c_r a'_r M c_r a_s = 0$$

$$\text{Ortogonalidad de modos } \frac{\Phi'_r M \Phi_s}{\Phi'_r K \Phi_s} = 0 \quad \text{o su equivalente.}$$

Cuando $w_r = w_s$ $\Phi'_i M \Phi_i = \overline{m}$ una constante, hallándose los c_i en función de ella. Y en el caso particular de que $\overline{m} = 1$, los vectores Φ_i serán ortonormales:

$$\underline{\Phi'_i M \Phi_i = 1}$$

Llamando Φ a la matriz que contiene a los n vectores propios:

$$\Phi = (\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \dots \Phi_n)$$

La condición de ortogonalidad en forma matricial es:

$$\underline{\Phi' M \Phi = \bar{m} I \quad \text{cuando} \quad \bar{m} = 1}$$

La fórmula equivalente con la matriz de rigideces será:

$$\begin{aligned} K \Phi_r &= w_r^2 M \Phi_r & \text{ó} & \quad \Phi'_s K \Phi_r = w_r^2 \Phi'_s M \Phi_r = 0 & \quad r \neq s \\ \Phi'_r K \Phi_r &= w_r^2 \Phi'_r M \Phi_r = \bar{m} w_r^2 & \quad r &= s \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\underline{\Phi' K \Phi = m w^2}$$

Desacoplamiento.

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} M \ddot{X} + C \dot{X} + K X &= 0 & \dot{X} &= \Phi \dot{q} & X &\text{depende del tiempo} \\ X &= \Phi q & q &\text{depende del tiempo} & & \text{[II]} \end{aligned}$$

Igualmente

$$\ddot{X} = \Phi \ddot{q}$$

El sistema de ecuaciones, dado en forma matricial, es equivalente:

$$\begin{aligned} M \Phi \ddot{q} + C \Phi \dot{q} + K \Phi q &= 0 \\ X &= \Phi q \end{aligned}$$

Y premultiplicando por la transpuesta de Φ :

$$\bar{m} \ddot{q} + \Phi' C \Phi \dot{q} + \bar{m} w^2 q = 0$$

Sólo en el caso de ser C diagonal, se obtendrá la suma de tres matrices diagonales y el sistema primitivo estará desacoplado en otro sistema equivalente, de la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{q} + (\Phi' C \Phi / \bar{m}) \dot{q} + w^2 q &= 0 \\ X &= \Phi q \end{aligned}$$

Resolviendo primero el sistema en q :

$$\ddot{q} + 2u \dot{q} + w^2 q = 0$$

En la que u es diagonal. Se resolverán las siguientes n ecuaciones:

$$\ddot{q}_i + 2u_{ii} \dot{q}_i + w_i^2 q_i = 0 \quad \text{Si} \quad v_i = (w_i^2 - u_{ii}^2)^{1/2}$$

La solución de la ecuación, por ser lineal y coeficientes constantes la buscaremos de la forma:

$$q(t) = e^{rt} \quad (\text{se han suprimido los subíndices})$$

$$r^2 e^{rt} + 2ur e^{rt} + w^2 e^{rt} = 0$$

$$r^2 + 2ur + w^2 = 0$$

$$r_1 = -u + iv$$

$$r_2 = -u - iv$$

La solución general, suma de las dos particulares, es:

$$q = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

es decir, sustituyendo:

$$q = e^{-ut} (C_1 \cos(ut) + C_2 \sin(ut))$$

Si inicialmente el sistema tiene un desplazamiento y una velocidad

$$q_0 \text{ y } \dot{q}_0$$

Derivando, la ecuación en q y sustituyendo valores para $t = 0$, se hallarán los coeficientes C y quedará la ecuación general que para el modo i , volviendo a restituir este subíndice en las ecuaciones tratadas, quedará:

$$\underline{q_i = e^{-u_{ii} t} (q_{0i} \cos(u_{ii} t) + (q'_{0i} + u_{ii} q_{0i} / v_i) \sin v_i t)} \quad \text{modo } i \quad [\text{III}]$$

Estas n ecuaciones, juntamente con las

$$X = \Phi q \quad [\text{IV}]$$

serán un sistema equivalente a [II], pero ya resuelto.

Además inicialmente se verificará:

$$\Phi q_0 = X_0$$

$$\Phi' M \Phi q_0 = \Phi' M X_0 = \bar{m} q_0$$

Haciendo lo mismo con $\dot{q}_0$, sustituiremos los valores iniciales del desplazamiento y velocidad:

$$q_0 = \Phi' M X_0 (1/\bar{m})$$

$$\dot{q}_0 = (1/\bar{m}) \Phi' M \dot{X}_0$$

Considerando la ecuación [III] acoplada en su forma matricial, y sustituyendo estos valores:

$$q(t) = E (\cos q(0) + uv^{-1} \sin q(0) + v^{-1} \sin \dot{q}(0))$$

$$q(t) = E ((\cos + uv^{-1} \sin) \Phi' M X_0 + v^{-1} \sin \Phi' M \dot{X}_0) 1/\bar{m} \quad [\text{III}] \text{ bis}$$

$$q(t) = E ((\cos + uv^{-1} \sin) \Phi' M X_0 + v^{-1} \sin \Phi' M \dot{X}_0) \quad \text{para } \Phi \text{ ortonormal}$$

Considerando la [IV], se tendrá la solución de la [II]:

$$\underline{X(t) = \Phi E ((\cos + u v^{-1} \text{Sen}) \Phi' M X_0 + v^{-1} \text{Sen} \Phi' M \dot{X}_0)) 1/\overline{m}}$$

Solución de la vibración libre, en la que si se consideran las ecuaciones [0], obtendremos la vibración libre de pisos, para un impulso inicial de los apoyos, por ejemplo, o para un estado inicial de los propios pisos:

$$\underline{X_s(t) = \Phi E ((\cos + u v^{-1} \text{Sen}) \Phi' M_4 X_0 + v^{-1} \text{Sen} \Phi' M_4 \dot{X}_0)) 1/\overline{m}} \quad [V]$$

Siendo:

z = Instante inicial.

Φ = Matriz de vectores propios.

$\cos$ = Matriz diagonal $\cos v_i (t - z)$.

Sen = Matriz diagonal $\text{sen} v_i (t - z)$.

u = Matriz diagonal $(1/\overline{m}) \Phi' C \Phi$. [VI]

C = Matriz diagonal de amortiguamiento C_4 .

E = Matriz diagonal $e^{-u_{ii} (t-z)}$.

X_0 = Vector desplazamiento inicial.

$\dot{X}_0$ = Vector velocidad inicial.

K = Matriz de rigidez K_4 .

2. Resolución de la forzada por impulsos.

El sistema [0], según [II], se transformaría en:

$$\ddot{q} + 2u q' + w^2 q = \Phi' f(t) 1/\overline{m} = F(t)$$

f son las fuerzas aplicadas al sistema, como consecuencia del movimiento de los apoyos, igualmente podrían ser otro sistema cualquiera.

Para $t = z$ tendremos un vector impulso $F(z) dz$ (*).

Y la solución del sistema [III] bis para $q(0) = 0$
 $q'(0) = F(z) dz$ es:

$$q = E v^{-1} \text{Sen} F(z) dz$$

Por lo que sumando todos los impulsos desde $t = 0$, en un instante cualquiera t , la $q(t)$ correspondiente como integral:

$$q(t) = v^{-1} \int_0^t E \text{Sen} F(z) dz = v^{-1/\overline{m}} \int_0^t E \text{Sen} \Phi' f(z) dz$$

(*) z es la variable independiente sobre la que se integra, tomando los mismos significados de [VI].

volviendo acoplar, o sea,

$$X = \Phi q = \Phi v^{-1/\bar{m}} \int_0^t E \operatorname{Sen} \Phi' f(z) dz$$

Esta solución es la particular del sistema [0], cuando no hay condiciones iniciales 0, lo que es lo mismo; la solución a añadir a la homogénea [V], si se quiere la solución general:

$$X_s(t) = \Phi v^{-1/\bar{m}} \int_0^t E \operatorname{Sen} \Phi' f(z) dz$$

Para movimiento de apoyos las fuerzas f que intervienen a nivel de pisos son:

$$f(z) = -K_3 X_f(z)$$

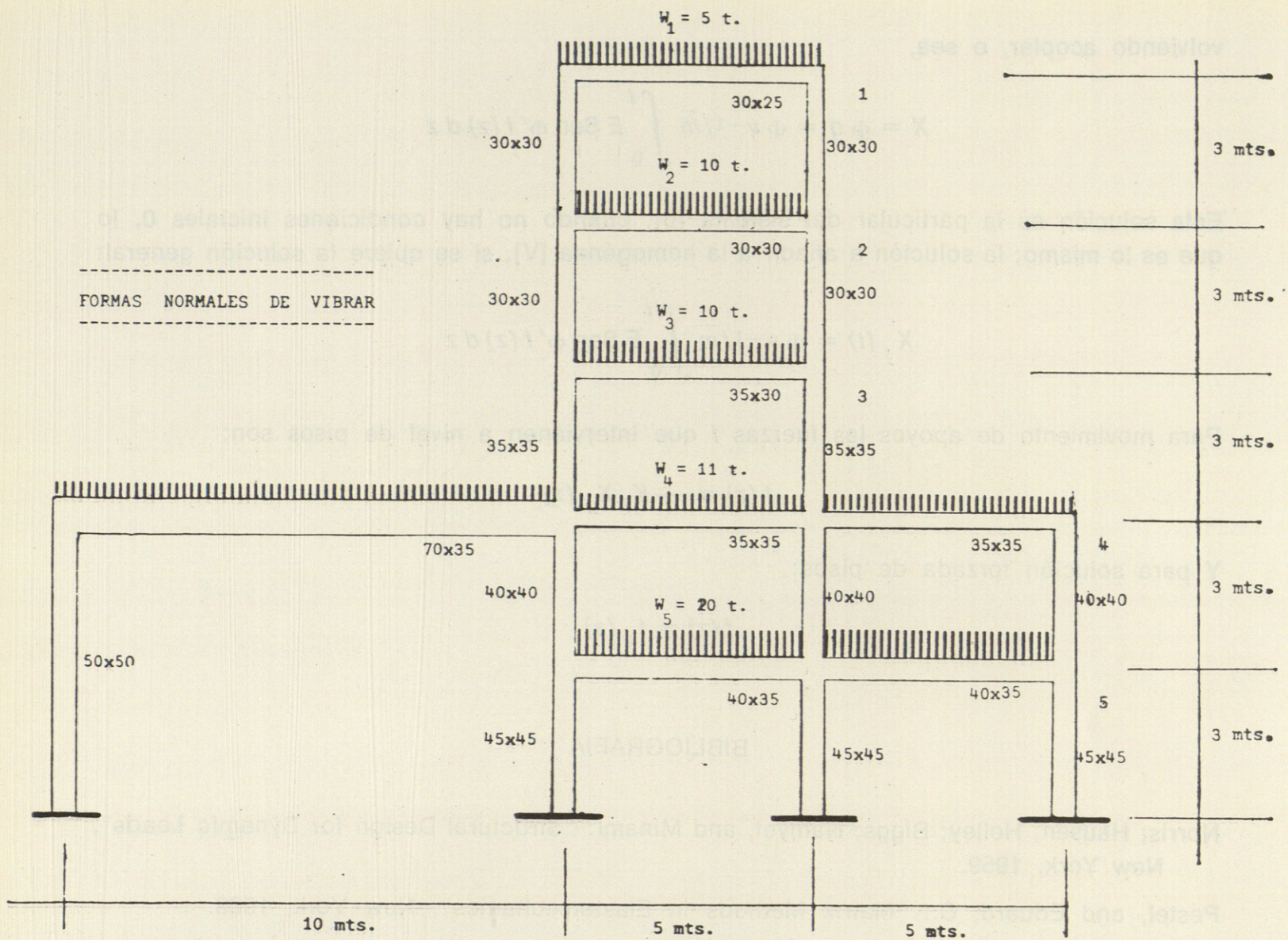
Y para solución forzada de pisos:

$$f(z) = f_s(z)$$

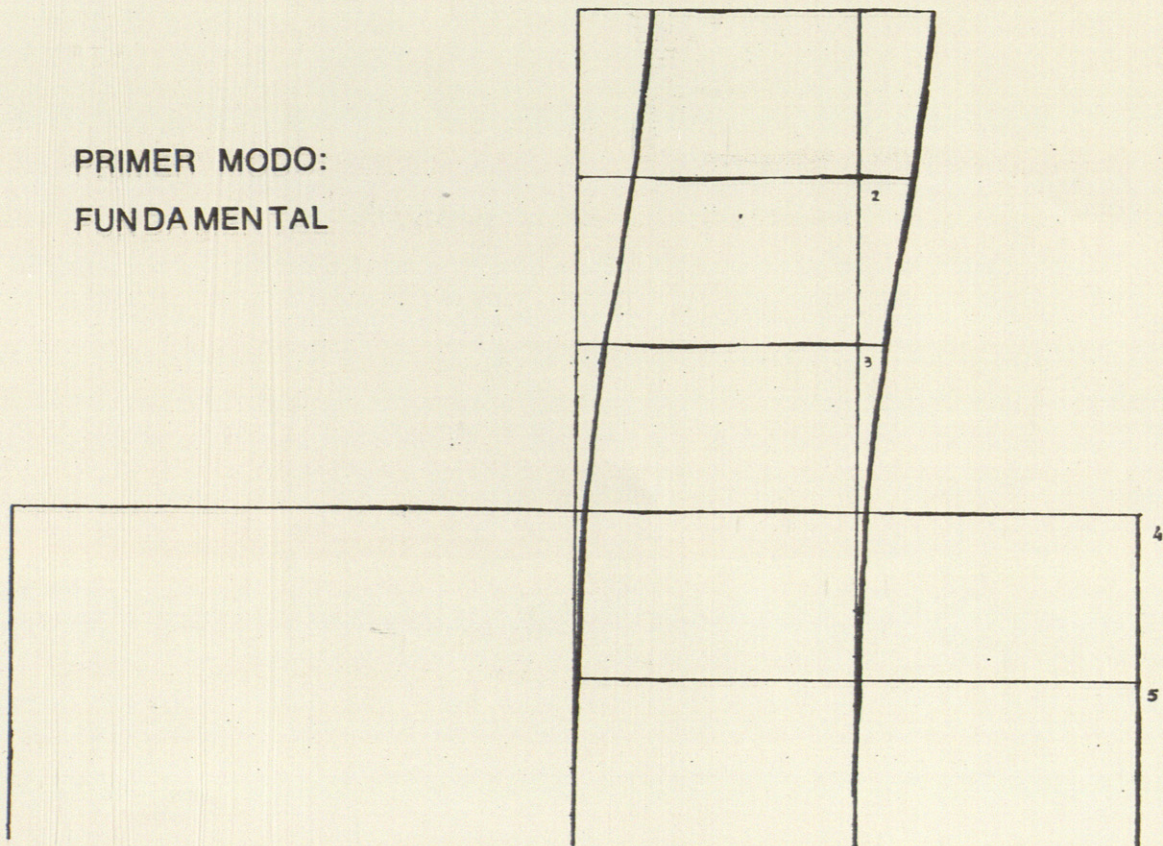
BIBLIOGRAFIA

Norris; Hausen; Holley; Biggs; Namyet, and Minami: "Structural Design for Dynamic Loads", New York, 1959.

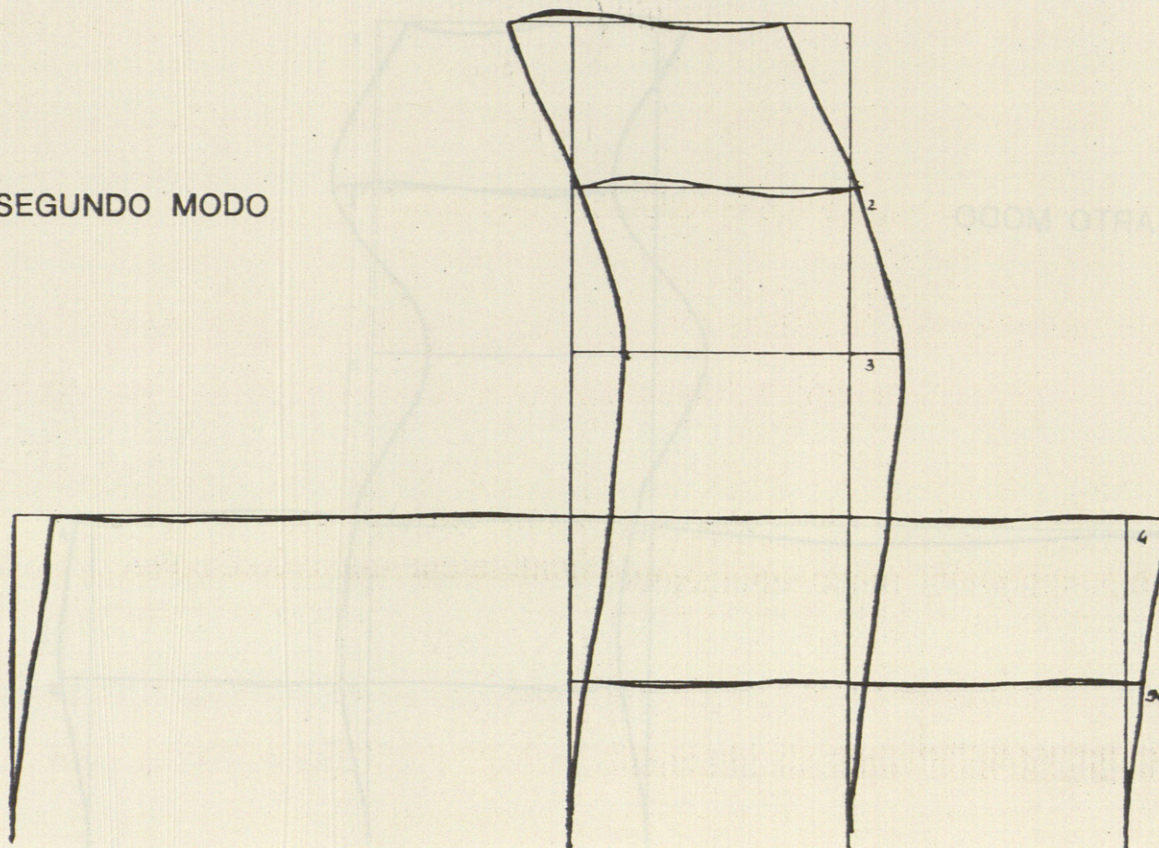
Pestel, and Eduard, C.: "Matrix Methods in Elastomechanics", New York, 1963.



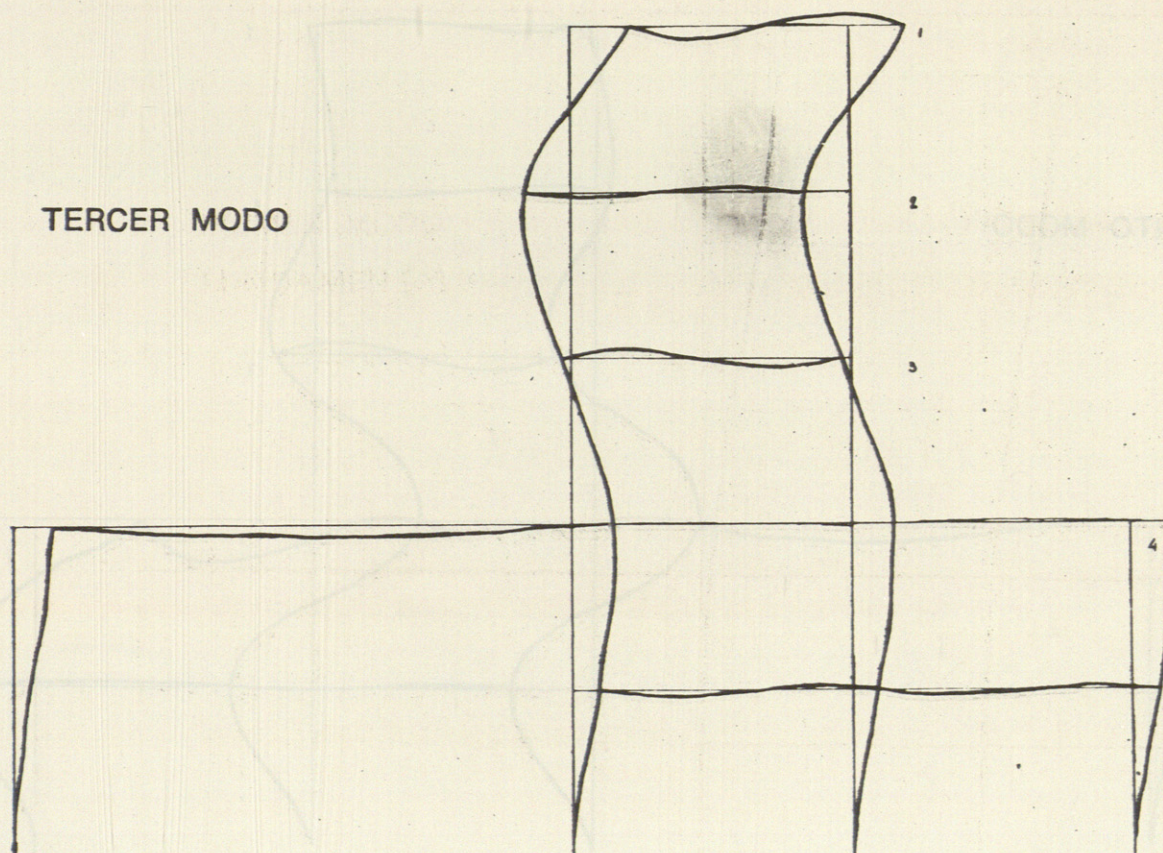
PRIMER MODO:
FUNDAMENTAL



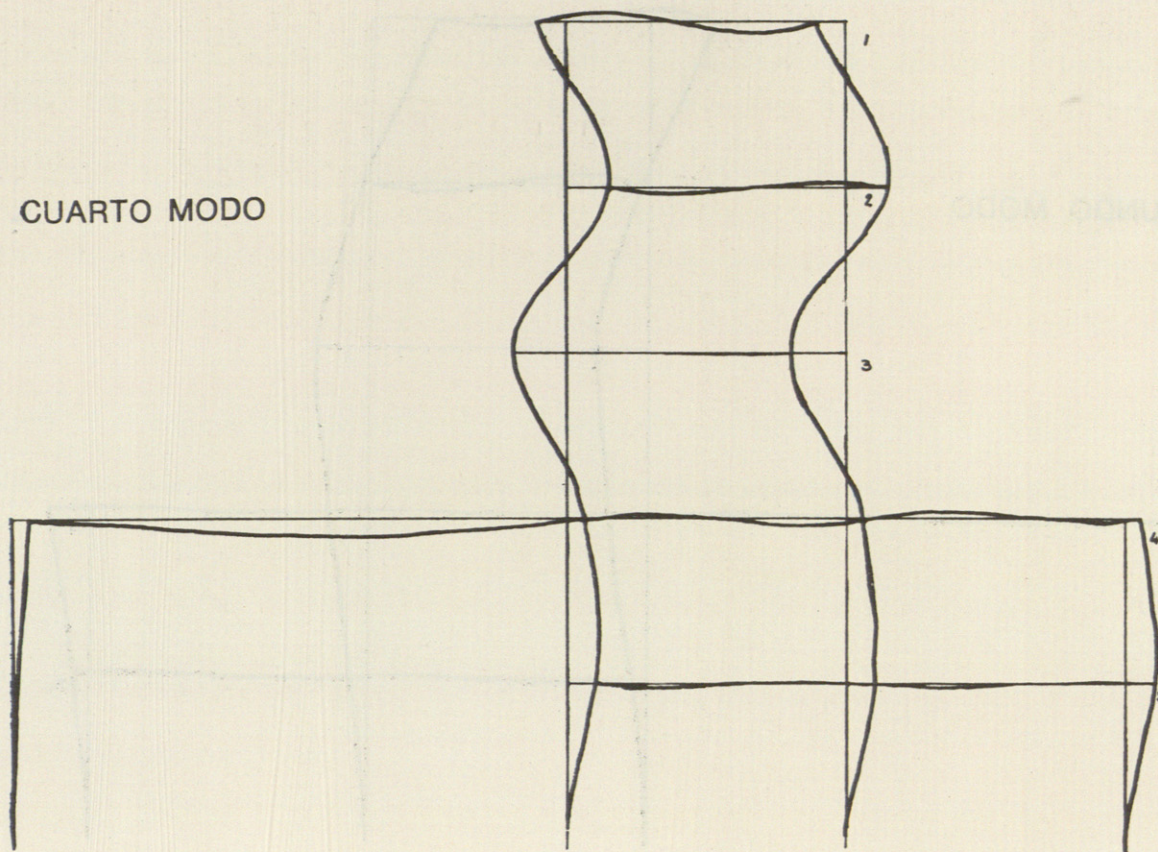
SEGUNDO MODO



TERCER MODO



CUARTO MODO



QUINTO MODO

