

*El presente trabajo está basado en el artículo del arquitecto español Félix Candela, profesor de la Facultad de Arquitectura de México, D. F., publicado en el Journal of the American Concrete Institute, v. 26, No. 5, Jan. 1955, y titulado "Structural Application of Hyperbolic Paraboloidal Shells".*

## I. PREÁMBULO

En la construcción moderna el empleo de las bóvedas se va haciendo cada vez más frecuente.

El abandono parcial de los techos planos no obedece a capricho. Las construcciones abovedadas se imponen no solamente por su belleza, sino principalmente por su economía y sus posibilidades técnicas. El Banco Obrero, en el conjunto de sus trabajos del año presente (1956), ha dado amplia cabida al empleo de cubiertas abovedadas. Más de 40 edificios han sido construidos con este sistema, que es, a la vez, antiquísimo y muy moderno.

Nuestra experiencia ha sido, afortunadamente, satisfactoria desde el punto de vista técnico, y nos sentimos muy honrados al presentarla a nuestros colegas, con el deseo de que pueda serles útil y con la esperanza de mejorar nuestros propios conocimientos con la colaboración de su competente crítica.

## II. INTRODUCCIÓN

El estudio de las membranas comprende dos partes. La primera consiste en la consideración, de carácter general, del estado elástico (plano) de un punto ordinario de la membrana. La segunda establece las ecuaciones diferenciales de su equilibrio. Estas ecuaciones dependen del sistema de coordenadas elegido para representar la membrana como la forma geométrica. En cada caso se busca el sistema de coordenadas que conduzca a las ecuaciones más sencillas. Sin embargo, el proceso de obtención es, en todos los casos, el mismo. La integración del sistema de estas ecuaciones es un problema puramente matemático. Cuando la obtención de las funciones primitivas es muy laboriosa o no se conoce, pueden emplearse los métodos de integración aproximada (diferencias finitas). Las constantes de integración se determinan mediante condiciones prefijadas en los bordes de la membrana. Por definición, una bóveda es membrana cuando el sistema de las fuerzas exteriores que en ella actúa se equilibra con un sistema de fuerzas interiores en el que los tensores de fuerzas unitarias son planos y están situados en los planos tangentes de la membrana.

Las funciones primitivas determinan las reacciones de la membrana a lo largo de sus bordes. Dichas reacciones tienen que ser recogidas generalmente mediante elementos constructivos ajenos a la membrana. Cuando el

peso de éstos es insignificante, pueden quedar sumergidos en el espesor de ella. Generalmente no sucede así. El peso propio de los bordes suele no ser despreciable. Si ha de ser resistido por la propia bóveda, el régimen de ésta deja de ser el de membrana.

## III. ESTADO ELÁSTICO PLANO

1. Consideramos un punto ordinario  $O$  perteneciente a una superficie  $S$ . Admitimos que, en un entorno espacial de  $O$  suficientemente pequeño, el plano tangente y la superficie están confundidos. La parte de  $S$  interior en el entorno espacial considerado es el entorno superficial de  $O$ . Los entornos superficiales de los puntos ordinarios, si son suficientemente pequeños, son planos.

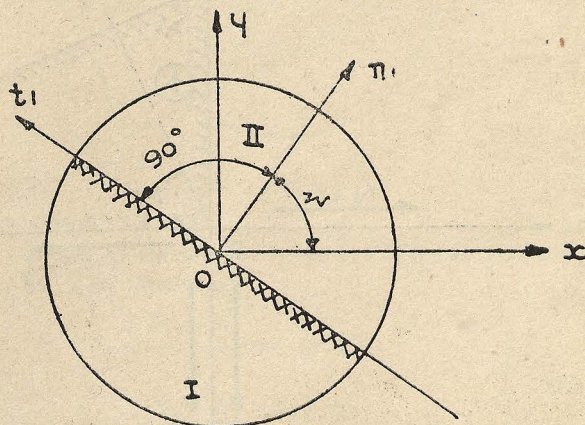


FIG. 1.

Sea (fig. 1) el entorno superficial del punto  $O$ . En su plano, y con origen en  $O$ , se determinan dos semirrectas  $(n_1, t_1)$  que forman un cuadrante positivo. Las semirrectas  $n_1, t_1$  son, respectivamente, origen y extremo del cuadrante. La semirrecta  $t_1$  y su complementaria  $t_1'$  dividen el entorno en dos semientornos. Por convenio, atribuimos a la semirrecta  $n_1$  el semientorno que no la contiene. Existe una correspondencia biunívoca entre las semirrectas  $n_1$  y los semientornos. Cada semientorno queda representado por la semirrecta correspondiente.

2. Supongamos determinada una función vectorial de la semirrecta  $n_1$  de tal modo que a cada semirrecta  $n_1$  corresponda una fuerza  $F$  vinculada en  $O$  y situada en el plano del entorno. Esta función, además, hará corresponder a la semirrecta  $n_1'$  complementaria de  $n_1$  el vector  $-F$  opuesto a  $F$ .



Para precisar la exposición, supongamos también que el entorno es circular, de diámetro  $\delta$  y centro en  $O$ . El segmento de la recta  $(t_1 + t'_1)$  contenido en el entorno es el "borde" del semientorno determinado por  $n_1$ . Llamamos fuerza de borde correspondiente a  $n_1$  al vector  $\delta \cdot F$  (siendo, en esta expresión,  $\delta$  un escalar).

A un borde de longitud igual a la unidad corresponde una fuerza de valor vectorial  $F$ . Por esta razón, las fuerzas  $F$  se llaman "fuerzas unitarias".

Postulado: La situación mecánica del semientorno ligado a  $n_1$  es idéntica cuando se considera como parte del entorno completo y cuando se considera separado de su semientorno complementario y en su borde aplicada la fuerza de borde. La fuerza de borde equivale, pues, mecánicamente al semientorno complementario.

En lo sucesivo, la fuerza unitaria  $F$  se considera representada por sus dos proyecciones  $(N_1, T_1)$  ortogonales, sobre  $(n_1, t_1)$ , respectivamente.

ha de quedar cumplido, pues, por las otras tres, que son infinitésimos de primer orden.

Supongamos que el ángulo en  $O$  vale  $\frac{n}{2}$ , que  $OA$  y  $OB$  son los ejes  $Ox, Oy$  de un sistema cartesiano, que  $\omega$  es el ángulo de  $n_3$  semirrecta del borde  $AB$ , con el eje  $OX$ , y que

$$\alpha = \cos \omega \quad \beta = \sin \omega$$

Los lados del triángulo valen

$$\begin{aligned} AB &= d\lambda \\ OA &= \sin \omega \cdot AB = \beta \cdot d\lambda \\ OB &= \cos \omega \cdot AB = \alpha \cdot d\lambda \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones del equilibrio son:

en el eje  $Ox$ :

$$-\alpha \cdot d\lambda \cdot N_x + \beta \cdot d\lambda \cdot T_y + \alpha \cdot d\lambda \cdot N_3 - \beta \cdot d\lambda \cdot T_3 = 0.$$

en el eje  $Oy$ :

$$-\alpha \cdot d\lambda \cdot T_x - \beta \cdot d\lambda \cdot N_y + \beta \cdot d\lambda \cdot N_3 + \alpha \cdot d\lambda \cdot T_3 = 0,$$

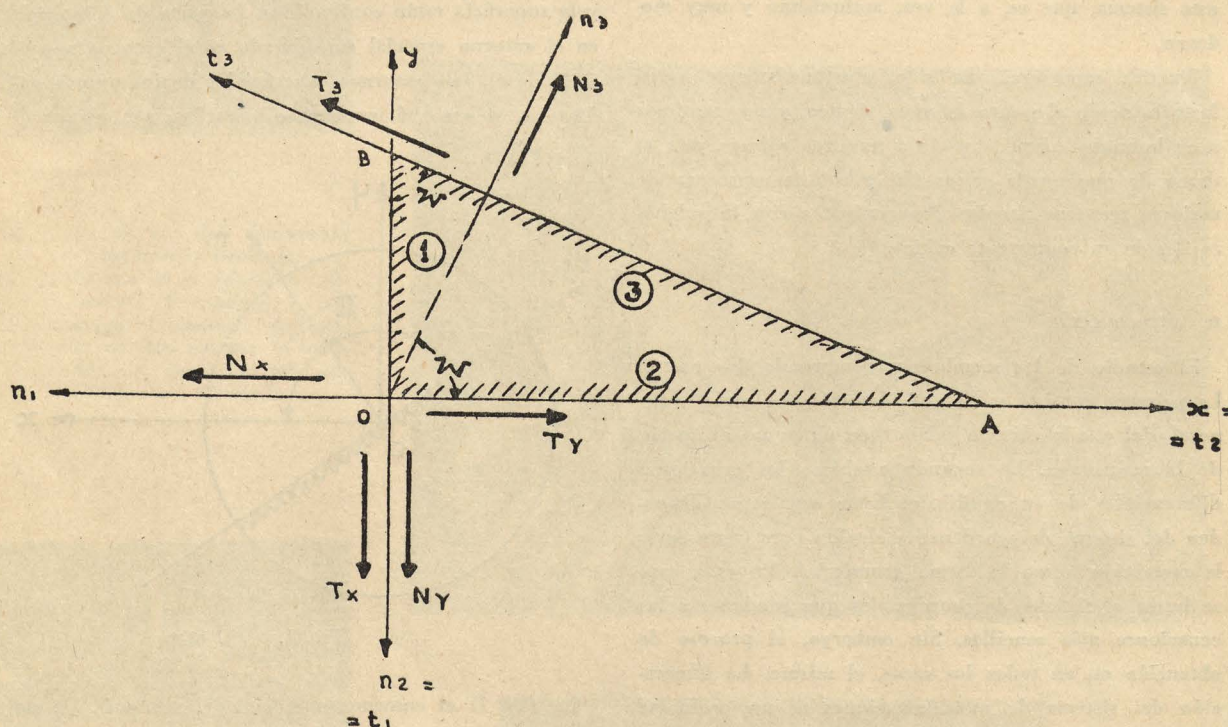


FIG. 2.

3. Fig. 2: *Equilibrio de un triángulo*.—El triángulo  $ABO$  está contenido en el entorno superficial de  $O$ . Las fuerzas exteriores que actúan en  $ABO$  son exclusivamente superficiales, y definidas mediante una ley continua, que permite expresar su valor total para  $ABO$  en la forma  $V \cdot d\Omega$ , donde  $V$  representa un vector finito y  $d\Omega$  el área de  $ABO$ .

Tomando como bordes los tres lados del triángulo y separándolo del resto de la superficie, las tres fuerzas de borde y la de superficie han de estar en equilibrio.

Como la fuerza de superficie es un infinitésimo de segundo orden, se puede considerar nula. El equilibrio

o sea:

$$\begin{aligned} -\alpha \cdot N_x + \beta \cdot T_y + \alpha \cdot N_3 - \beta \cdot T_3 &= 0, \\ -\alpha \cdot T_x - \beta \cdot N_y + \beta \cdot N_3 + \alpha \cdot T_3 &= 0. \end{aligned}$$

de las cuales resulta:

$$\left. \begin{aligned} T_3 &= \alpha^2 \cdot T_x + \beta^2 \cdot T_y - \alpha \cdot \beta (N_x - N_y) \\ N_3 &= \alpha^2 \cdot N_x + \beta^2 \cdot N_y - \alpha \cdot \beta (T_y - T_x) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

En estas expresiones no interviene la distancia de  $O$  a la recta  $AB$ . Por consiguiente, valen para el caso límite de la recta  $AB$  perteneciente al punto  $O$ . Una vez determinado el valor de la fuerza unitaria en dos bordes ortogonales, queda determinado en todos los demás.



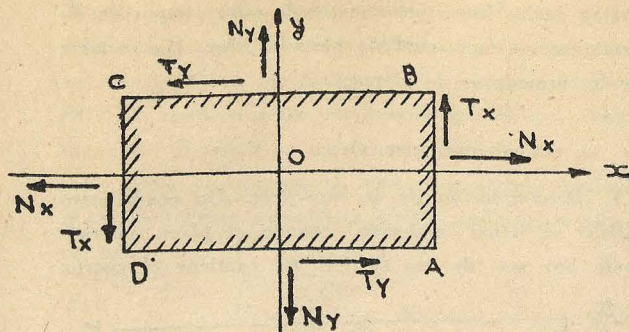


Fig. 3.

4. Fig. 3: *Equilibrio de un rectángulo.*—El rectángulo  $ABCD$  está contenido en el entorno superficial de  $O$ . Como en el caso anterior, se consideran sus lados como bordes de separación de la restante superficie, y se desprecian las fuerzas superficiales por ser infinitésimos de segundo orden. Se tiene

$$AB = CD = 2 \cdot dy \quad BC = DA = 2 \cdot dx.$$

La resultante de las fuerzas de borde es nula. Pero el momento resultante, con relación al punto  $O$ , ha de cumplir la condición

$$2 \cdot dy \cdot T_x \cdot 2 \cdot dx + 2 \cdot dx \cdot T_y \cdot 2 \cdot dy = 0,$$

que implica

$$T_x + T_y = 0. \quad (II)$$

5. *Fórmulas finales.*—Si en las expresiones (I) se pone

$$T_x = -T_y = T,$$

resultado de la (II), queda

$$\left. \begin{aligned} T_s &= (\alpha^2 - \beta^2) \cdot T - \alpha \cdot \beta (N_x - N_y) \\ N_s &= \alpha^2 \cdot N_x + \beta^2 \cdot N_y + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot T \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

Como

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= \cos^2 \omega - \sin^2 \omega = \cos(2 \cdot \omega) \\ 2 \alpha \beta &= 2 \cdot \cos \omega \cdot \sin \omega = \sin(2 \cdot \omega). \end{aligned}$$

se verifica

$$T_s = T \cdot \cos(2 \cdot \omega) - \frac{N_x - N_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega).$$

Para las raíces de la ecuación transcendente

$$\operatorname{tg}(2 \cdot \omega) = \frac{2 \cdot T}{N_x - N_y},$$

se anula  $T_s$ .

Dicha ecuación solamente es indeterminada si

$$T = N_x - N_y = 0,$$

en cuyo caso  $T_s = 0$ . Cuando  $T_s = 0$ , la dirección  $n_s$  correspondiente se llama "principal".

Por consiguiente, hay siempre en el entorno de  $O$  dos direcciones principales, o todas sus direcciones son principales.

Adoptando como ejes coordenados las dos direcciones principales, y designando con  $(N_r, T_r)$  a la fuerza unitaria ligada a la dirección  $Or = n_r$ , las expresiones (III) adquieren la forma

$$\left. \begin{aligned} T_r &= \alpha \cdot \beta (N_y - N_x) \\ N_r &= \beta^2 \cdot N_y + \alpha^2 \cdot N_x \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Los componentes coordenados  $(X, Y)$  de  $(N, T)$  en dichos ejes son:

$$\left. \begin{aligned} X_r &= \alpha \cdot N_r - \beta \cdot T_r = \alpha \cdot N_x \\ Y_r &= \beta \cdot N_r + \alpha \cdot T_r = \beta \cdot N_y \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

y como

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

resulta

$$\frac{X_r^2}{N_x^2} + \frac{Y_r^2}{N_y^2} = 1 \quad (VI)$$

Los puntos extremos de los vectores fuerzas unitarias pertenecen a la elipse representada por la fórmula (VI), que se llama "elipse de Lamé".

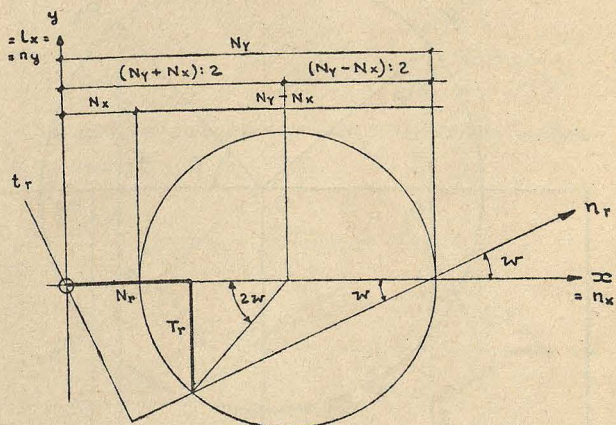


Fig. 4.

6. Fig. 4: *Círculo de Mohr.*—Las fórmulas (III) equivalen a las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} T_r &= \frac{N_y - N_x}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega) \\ N_r &= \frac{N_y + N_x}{2} + \frac{N_y - N_x}{2} \cdot \cos(2 \cdot \omega) \end{aligned} \right\} \quad (VII)$$

En el cuadrante  $(t_1, n_1)$  estas expresiones son las ecuaciones paramétricas de un círculo.

El valor máximo de la componente tangencial  $T_r$  es el radio del círculo, es decir,

$$T_{max} = \frac{N_y - N_x}{2},$$

y siempre se produce en las bisectrices de las direcciones principales.

Cuando las dos fuerzas unitarias principales son de signo opuesto, es decir, cuando una es compresión y la otra es tracción, hay dos bordes, simétricamente situados con relación a las direcciones principales, en los que se anula la componente normal  $N_r$ . Dichos bordes soportan una fuerza unitaria tangencial "pura", cuyo valor es

$$T_r = \sqrt{N_y \cdot N_x}$$



Esta fuerza tangencial pura solamente coincide con la fuerza tangencial máxima cuando

$$|N_x| = |N_y|$$

La dirección  $\omega_0$  correspondiente a los bordes de fuerza tangencial pura está determinada por la relación

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \frac{\sqrt{N_y \cdot N_x}}{N_y} = \sqrt{\frac{N_x}{N_y}}$$

Cuando se conocen los valores  $N_1, N_2, N_3$  de los tres componentes normales correspondientes a tres direcciones  $n_1, n_2, n_3$ , de las cuales  $n_2$  es bisectriz de las otras dos y éstas,  $n_1, n_3$ , son ortogonales, la construcción del

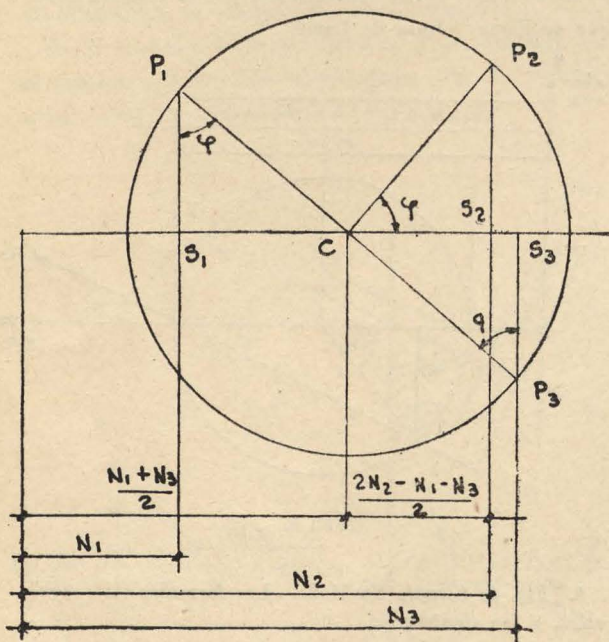


FIG. 5.

círculo de Mohr queda determinada, puesto que la posición del centro  $C$  corresponde al valor

$$\frac{N_1 + N_3}{2},$$

y se verifica

$$CS_2 = P_3S_3.$$

7. El análisis de las fuerzas internas de una membrana está completo cuando se conocen las dos direcciones principales en cada uno de sus puntos y las fuerzas unitarias que les corresponden. Las direcciones principales constituyen, sobre la membrana, dos campos ortogonales de direcciones, cuyas líneas envolventes se denominan "líneas isostáticas". Por consiguiente, para cada sistema de cargas hay dos familias de líneas isostáticas ortogonales. Otros dos campos de direcciones quedan determinados mediante las direcciones de las fuerzas unitarias tangenciales puras, cuando existen. La determi-

nación de las líneas envolventes de estos campos de direcciones es imprescindible para la colocación correcta de las armaduras de hierro.

#### IV. EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

1. *Determinación de la superficie.*—Un cuadrilátero  $ABCD$  se llama "alabeado" cuando el plano determinado por tres de sus vértices no contiene el cuarto.

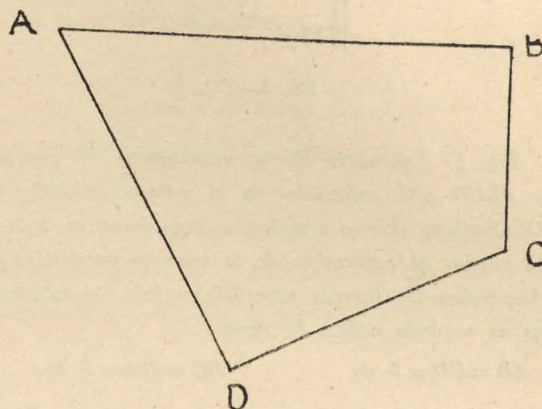


FIG. 6.

Existe un haz de planos  $H_1$  de arista impropia, determinada por los puntos impropios de los dos lados opuestos ( $AB, CD$ ) del cuadrilátero.

Hay otro haz de planos  $H_2$  de arista impropia, determinada por los puntos impropios del otro par de lados opuestos ( $BC, DA$ ). Las rectas resultantes como intersección de un plano de  $H_1$  con un plano de  $H_2$  consti-

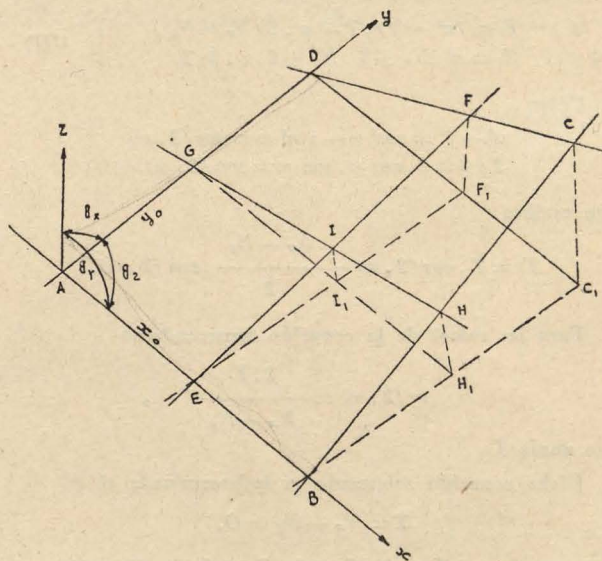


FIG. 7.

tuyen una radiación de rectas, cuyo vértice impropio es la intersección de las dos aristas impropias de  $H_1$  y  $H_2$ . Cada plano de  $H_2$  corta al par de lados  $AB, CD$ , o a sus prolongaciones, en sendos puntos. Cada uno de estos pares de puntos determina una recta, que se llama "generatriz". El conjunto de las generatrices es una



"familia" de rectas, cuya superficie envolvente es, por definición, el paraboloides hiperbólico. El mismo proceso, ejecutado con los planos de  $H_1$  y el par de lados  $BC.DA$ , conduce a un paraboloides hiperbólico coincidente con el anterior.

En efecto, el segmento II, tanto si se calcula mediante el primer proceso como si se calcula mediante el segundo, vale

$$II_1 = \frac{CC_1}{AB \cdot AD} \cdot AG \cdot AE \quad (I)$$

2. Adoptando como triedro cartesiano de referencia el determinado por el plano  $BAD$ , el plano de  $H_2$  que pasa por  $AD$  y el plano de  $H_1$  que pasa por  $AB$ , la expresión (I) adquiere la forma

$$z = k \cdot x \cdot y \quad (II)$$

Hay en el paraboloides hiperbólico un punto, llamado "vértice", en el cual

$$\theta_x = \theta_y = \frac{n}{2}.$$

En efecto, para que (I) sea el vértice se deben verificar las siguientes relaciones entre sus coordenadas:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= x_0 \cdot \cos(n - \theta_y) = -x_0 \cdot \cos \theta_y \\ z_0 &= k \cdot x_0 \cdot y_0 \end{aligned} \right\} y_0 = -\frac{k}{\cos \theta_y}$$

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= y_0 \cdot \cos(n - \theta_x) = -y_0 \cdot \cos \theta_x \\ z_0 &= k \cdot x_0 \cdot y_0 \end{aligned} \right\} x_0 = -\frac{\cos \theta_x}{k}$$

Para operar con el indicado triedro son importantes las siguientes fórmulas:

$$k = \frac{CC_1}{AB \cdot AD}$$

$$\cos \theta_z = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD}$$

$$\cos \theta_y = \frac{BC^2 - AD^2 - CC_1^2}{2 \cdot AD \cdot CC_1}$$

$$\cos \theta_x = \frac{CD^2 - AB^2 - CC_1^2}{2 \cdot AB \cdot CC_1}$$

Finalmente, si es  $\theta$  el ángulo formado por las dos generatrices que pasan por el vértice,

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta_z - \cos \theta_x \cdot \cos \theta_y}{\sin \theta_x - \sin \theta_y}.$$

Por consiguiente, cualquiera que sea el cuadrilátero alabeado generador del paraboloides hiperbólico, mediante las expresiones anteriores se puede determinar la posición de su vértice y la del triedro correspondiente.

## V. ECUACIONES DEL EQUILIBRIO DE UNA MEMBRANA

1. Los valores angulares de las caras del triedro de referencia son  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ . La membrana está representada por una función explícita:

$$z = f(x, y)$$

con derivadas de primero y segundo orden, y estas últimas continuas.

Representamos con  $dx, dy$  los incrementos de las variables independientes. Representamos con  $\Delta x, \Delta y$  los incrementos de la variable dependiente  $z$  cuando  $y$  o  $x$ , respectivamente, permanecen constantes. Usaremos la notación de Monge para las derivadas parciales:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

y las restantes notaciones quedan determinadas mediante la figura 8.

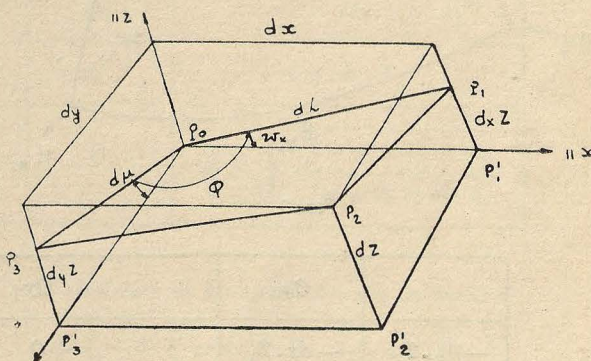


FIG. 8.

Se verifica

$$\Delta \lambda^2 = dx^2 + \Delta x^2 + 2 \cdot dx \cdot \Delta x \cdot \cos \theta_y$$

$$\Delta \mu^2 = dy^2 + \Delta y^2 + 2 \cdot dy \cdot \Delta y \cdot \cos \theta_x$$

y

$$d\lambda = dx \sqrt{1 + p^2 + 2 \cdot p \cdot \cos \theta_y}$$

$$d\mu = dy \sqrt{1 + q^2 + 2 \cdot q \cdot \cos \theta_x}$$

Por el teorema de los senos

$$\frac{dx}{\sin \omega_\lambda} = \frac{d\lambda}{\sin \theta_y},$$

o sea:

$$\sin \omega_\lambda = \frac{dx}{d\lambda} \cdot \sin \theta_y = \frac{dx}{dx} \cdot \frac{dx}{d\lambda} \sin \theta_y =$$

$$= \frac{p \cdot \sin \theta_y}{\sqrt{1 + p^2 + 2 \cdot p \cdot \cos \theta_y}}$$

$$\cos^2 \omega_\lambda = 1 - \sin^2 \omega_\lambda = \frac{(1 + p \cdot \cos \theta_y)^2}{1 + p^2 + 2p \cdot \cos \theta_y}$$



Por consiguiente, valen las expresiones

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \omega_{\lambda} &= \frac{p \cdot \operatorname{sen} \theta_y}{\sqrt{1 + p^2 + 2 \cdot p \cdot \cos \theta_y}} \\ \cos \omega_{\lambda} &= \frac{1 + p \cdot \cos \theta_y}{\sqrt{1 + p^2 + 2 \cdot p \cdot \cos \theta_y}} \\ \operatorname{sen} \omega_{\mu} &= \frac{q \cdot \operatorname{sen} \theta_x}{\sqrt{1 + q^2 + 2 \cdot q \cdot \cos \theta_x}} \\ \cos \omega_{\mu} &= \frac{1 + q \cdot \cos \theta_x}{\sqrt{1 + q^2 + 2 \cdot q \cdot \cos \theta_x}}\end{aligned}$$

El ángulo  $\varphi$ , determinado por los dos elementos

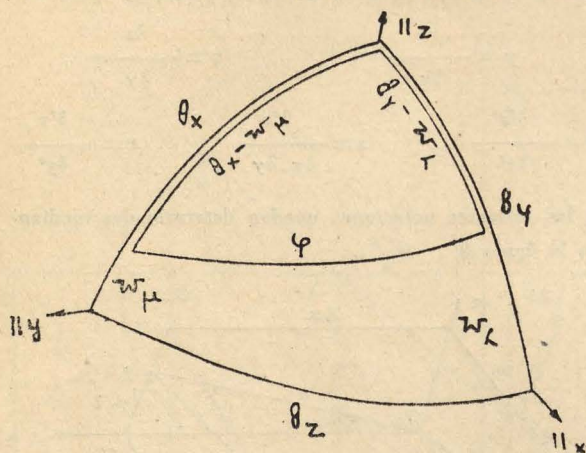


FIG. 9.

2. En el entorno superficial de  $P_0$  (figs. 8 y 10) se considera la fuerza unitaria del borde  $P_0 P_1$  que se descompone en las direcciones  $P_0 P_1$  y  $P_0 P_3$ . Sus dos

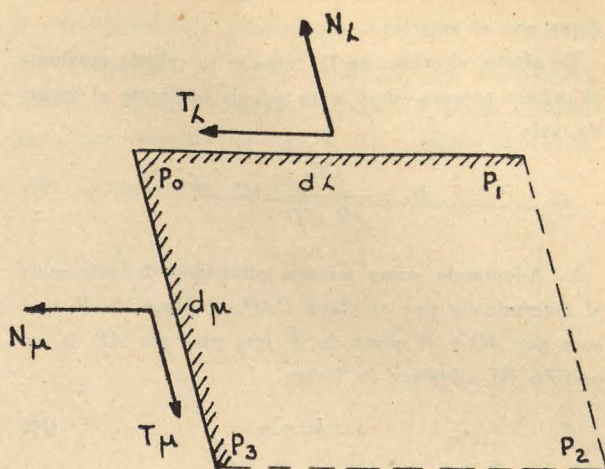


FIG. 10.

proyecciones oblicuas se designan, respectivamente, con  $T_{\lambda} \cdot N_{\lambda}$ . Por consiguiente, la fuerza total en el borde es

$$(-d\lambda \cdot T_{\lambda}, -d\lambda \cdot N_{\lambda}).$$

Cada uno de estos dos componentes se proyecta sobre los tres ejes de coordenadas, y así resulta el cuadro siguiente:

	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$-d\lambda \cdot T_{\lambda}$	$-dx \cdot T_{\lambda}$	$O$	$-p \cdot dx \cdot T_{\lambda}$
$-d\lambda \cdot N_{\lambda}$	$O$	$-dx N_{\lambda} \sqrt{\frac{1 + p^2 + 2p \cos \theta_y}{1 + q^2 + 2q \cos \theta_x}}$	$-dx \cdot n_{\lambda} \cdot q \sqrt{\frac{1 + p^2 + 2p \cos \theta_y}{1 + q^2 + 2q \cos \theta_x}}$

lineales  $d\lambda$ ,  $d\mu$ , se deduce de las relaciones entre los triángulos esféricos de la figura 9, y vale

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \cos (\theta_x - \omega_{\mu}) \cdot \cos (\theta_y - \omega_{\lambda}) + \\ &+ \operatorname{sen} (\theta_x - \omega_{\mu}) \cdot \operatorname{sen} (\theta_y - \omega_{\lambda}) \frac{\cos \theta_z - \cos \theta_x \cdot \cos \theta_y}{\operatorname{sen} \theta_x \cdot \operatorname{sen} \theta_y}.\end{aligned}$$

Si en el triedro de referencia son

$$\theta_x = \theta_y = \frac{\pi}{2}$$

las fórmulas anteriores se simplifican:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \omega_{\lambda} &= \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} & \cos \omega_{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \\ \operatorname{sen} \omega_{\mu} &= \frac{q}{\sqrt{1 + q^2}} & \cos \omega_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{1 + q^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{p \cdot q + \cos \theta_z}{\sqrt{(1 + p^2) \cdot (1 + q^2)}}\end{aligned}$$

o sea:

$$-\xi = -dx \cdot T_{\lambda}$$

$$-\eta_{\lambda} = -dx \cdot N_{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{1 + p^2 + 2p \cos \theta_y}{1 + q^2 + 2q \cos \theta_x}} = -dx \cdot v_{\lambda}$$

$$\begin{aligned}-\zeta_{\lambda} &= -dx \left( p \cdot T_{\lambda} + q N_{\lambda} \sqrt{\frac{1 + p^2 + 2p \cos \theta_y}{1 + q^2 + 2q \cos \theta_x}} \right) = \\ &= -dx (p \cdot T_{\lambda} + q \cdot v_{\lambda}),\end{aligned}$$

poniendo, para simplificar la escritura,

$$v_{\lambda} = N_{\lambda} \sqrt{\frac{1 + p^2 + 2p \cos \theta_y}{1 + q^2 + 2q \cos \theta_x}}$$

La fuerza correspondiente al borde opuesto  $P_2 P_3$  es

$$(+\xi_{\lambda} + dy \xi_{\lambda}) \cdot (+\eta_{\lambda} + dy \eta_{\lambda}) \cdot (+\zeta_{\lambda} + dy \zeta_{\lambda}),$$



y la suma de ambas, es decir, la suma de las fuerzas correspondientes a los dos bordes opuestos, es

$$\begin{aligned} dy \xi_\lambda &= dy \cdot \frac{\delta \xi_\lambda}{\delta y} = dy \cdot dx \cdot \frac{\delta T_\lambda}{\delta y} \\ dy \eta_\lambda &= dy \cdot \frac{\delta \eta_\lambda}{\delta y} = dy \cdot dx \cdot \frac{\delta v_\lambda}{\delta y} \\ dy \zeta_\lambda &= dy \cdot \frac{\delta \zeta_\lambda}{\delta y} = dy \cdot dx \left( p \frac{\delta T_\lambda}{\delta y} + \right. \\ &\quad \left. + q \frac{\delta v_\lambda}{\delta y} + s \cdot T_\lambda + t \cdot v_\lambda \right) \end{aligned}$$

Del mismo modo, la fuerza correspondiente al borde de  $P_0 P_1$  se representa mediante sus componentes oblicuas

$$(+ d\mu \cdot T_\mu - d\mu \cdot N_\mu)$$

cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados se insertan en el siguiente cuadro:

	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$+ d\mu \cdot T_\mu$	$O$	$+ dy \cdot T_\mu$	$+ q \cdot dy \cdot T_\mu$
$- d\mu \cdot N_\mu$	$- dy \cdot p \cdot N_\mu \sqrt{\frac{1+q^2+2q \cos \theta_x}{1+p^2+2p \cos \theta_y}}$	$O$	$dy N_\mu \sqrt{\frac{1+q^2+2q \cos \theta_x}{1+p^2+2p \cos \theta_y}}$

equivalente a las expresiones

$$\begin{aligned} -\xi_\mu &= -dy \cdot N_\mu \sqrt{\frac{1+q^2+2q \cos \theta_x}{1+p^2+2p \cos \theta_y}} = -dy \cdot v_\mu \\ -\eta_\mu &= +dy \cdot T_\mu \\ -\zeta_\mu &= -dy \left( -q \cdot T_\mu + p \cdot N_\mu \cdot \sqrt{\frac{1+q^2+2q \cos \theta_x}{1+p^2+2p \cos \theta_y}} \right) = \\ &= dy - (-q T_\mu + p \cdot v_\mu) \end{aligned}$$

con

$$v_\mu = N_\mu \sqrt{\frac{1+q^2+2q \cos \theta_x}{1+p^2+2p \cos \theta_y}}$$

La suma de las fuerzas en los dos bordes opuestos  $P_0 P_1$  y  $P_1 P_2$  es

$$\begin{aligned} dx \xi_\mu &= dx \cdot \frac{\delta \xi_\mu}{\delta x} = dx \cdot dy \cdot \frac{\delta v_\mu}{\delta x} \\ dx \eta_\mu &= dx \cdot \frac{\delta \eta_\mu}{\delta x} = dx \cdot dy \left( -\frac{\delta T_\mu}{\delta x} \right) \\ dx \zeta_\mu &= dx \cdot \frac{\delta \zeta_\mu}{\delta x} = dx \cdot dy \left( -q \frac{\delta T_\mu}{\delta x} + \right. \\ &\quad \left. + p \frac{\delta v_\mu}{\delta x} - s \cdot T_\mu + r \cdot v_\mu \right) \end{aligned}$$

Por consiguiente, la resultante de las cuatro fuerzas de borde es

$$\begin{aligned} dy \xi_\lambda + dx \xi_\mu &= dx \cdot dy \left( \frac{\delta T_\lambda}{\delta y} + \frac{\delta v_\mu}{\delta x} \right) \\ dy \eta_\lambda + dx \eta_\mu &= dx \cdot dy \left( -\frac{\delta v_\lambda}{\delta y} - \frac{\delta T_\mu}{\delta x} \right) \\ dy \zeta_\lambda + dx \zeta_\mu &= dx \cdot dy \left[ p \left( \frac{\delta T_\lambda}{\delta y} + \frac{\delta v_\mu}{\delta x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + q \left( \frac{\delta v_\lambda}{\delta y} - \frac{\delta T_\mu}{\delta x} \right) + r \cdot v_\mu + s (T_\lambda - T_\mu) + t \cdot v_\lambda \right] \end{aligned}$$

Como el equilibrio del área elemental  $P_0 P_1 P_2 P_3$  requiere la anulación del momento resultante de las cuatro fuerzas de borde, se ha de verificar

$$T_\lambda + T_\mu = 0,$$

es decir,

$$T_\lambda = -T_\mu = T,$$

y la resultante de las cuatro fuerzas de borde es

$$\begin{aligned} dy \xi_\lambda + dx \xi_\mu &= dx \cdot dy \left( \frac{\delta T}{\delta y} + \frac{\delta v_\mu}{\delta x} \right) \\ dy \eta_\lambda + dx \eta_\mu &= dx \cdot dy \left( -\frac{\delta v_\lambda}{\delta y} + \frac{\delta T}{\delta x} \right) \\ dy \zeta_\lambda + dx \zeta_\mu &= dx \cdot dy \left[ p \left( \frac{\delta T}{\delta y} + \frac{\delta v_\mu}{\delta x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + q \left( \frac{\delta v_\lambda}{\delta y} + \frac{\delta T}{\delta x} \right) + r \cdot v_\mu + 2 \cdot s T + t \cdot v_\lambda \right] \end{aligned}$$

3. Las fuerzas exteriores que actúan en la membrana obedecen a una ley continua, que se puede suponer definida en los puntos de ella o en sus proyecciones sobre el plano  $xOy$ . Suponiendo esta última representación, al elemento de proyección  $dx \cdot dy$  corresponde la fuerza exterior

$$-U \cdot dx \cdot dy, \quad -V \cdot dx \cdot dy, \quad -W \cdot dx \cdot dy$$

y las condiciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{\delta y} + \frac{\delta v_\mu}{\delta x} &= U \\ \frac{\delta v_\lambda}{\delta y} + \frac{\delta T}{\delta x} &= V \\ p \left( \frac{\delta T}{\delta y} + \frac{\delta v_\mu}{\delta x} \right) + q \left( \frac{\delta v_\lambda}{\delta y} + \frac{\delta T}{\delta x} \right) + \\ &\quad + r \cdot v_\mu + 2 \cdot s \cdot T + t \cdot v_\lambda = W, \end{aligned}$$



y, teniendo en cuenta para escribir la tercera ecuación a las dos primeras, queda el sistema definitivo de las ecuaciones diferenciales del equilibrio de la membrana:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x} &= U \\ \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} &= Y \\ r \cdot v_{\mu} + 2 \cdot s \cdot T + t \cdot v_{\lambda} &= W - p \cdot U - q \cdot V \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

#### VI. APLICACIÓN AL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

1. Se adoptan como ejes coordenados los correspondientes al vértice de la superficie. La ecuación de ésta es:

$$z = k \cdot x \cdot y$$

y

$$p = k \cdot y \quad q = k \cdot x \quad r = 0 \quad s = k \quad t = 0$$

Las ecuaciones del equilibrio de esta membrana son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x} &= U \\ \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} &= V \\ 2 \cdot k \cdot T &= W - k \cdot (y \cdot U + x \cdot V) \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

2. Ley de cargas idénticamente nula

$$U = V = W = 0.$$

Resultado:

$$T = 0 \quad v_{\lambda} = f_1(x) \quad v_{\mu} = f_2(y)$$

$$N_{\lambda} = f_1(x) \sqrt{\frac{1+k^2x^2}{1+k^2y^2}} \quad N_{\mu} = f_2(y) \sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+k^2x^2}}$$

Las funciones  $f_1, f_2$  corresponden a leyes de carga que se pueden establecer en los bordes, en la dirección de las generatrices.

3. Ley de cargas uniforme con relación al plano  $xOy$

$$U = V = 0 \quad W = \text{constante}.$$

Resultado:

$$T = \frac{W}{2k} \quad N_{\lambda} = f_1(x) \sqrt{\frac{1+k^2x^2}{1+k^2y^2}} \quad N_{\mu} = f_2(y) \sqrt{\frac{1+k^2y^2}{1+k^2x^2}}$$

4. Ley de cargas uniforme con relación a la membrana. Sea  $P$  su valor en la dirección del eje  $Oz$ . Al elemento de proyección  $dx \cdot dy$  corresponde el elemento de membrana  $d\lambda \cdot d\mu$ , cuya área vale

$$d\lambda \cdot d\mu \cdot \text{sen } \varphi.$$

Según la fórmula (II) de V.1, se tiene:

$$\text{sen}^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{(p \cdot q + \cos \theta_z)^2}{(1+p^2)(1+q^2)}$$

y el área antes indicada es:

$$d\lambda \cdot d\mu \cdot \text{sen } \varphi = dx \cdot dy \sqrt{\text{sen}^2 \theta_z + k^2(x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta_z)}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} W &= P \cdot \sqrt{\text{sen}^2 \theta_z + k^2(x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta_z)} = \\ &= P \cdot \text{sen } \theta_z \cdot \sqrt{\Phi} \end{aligned}$$

con

$$\Phi = q + \frac{k}{\text{sen } \theta_z} \cdot (x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta_z)$$

Resulta:

$$T = \frac{P \cdot \text{sen } \theta_z}{2k} \sqrt{\Phi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{P \cdot k}{2 \cdot \text{sen } \theta_z} \cdot \frac{x - y \cos \theta_z}{\sqrt{\Phi}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{P \cdot k}{2 \cdot \text{sen } \theta_z} \cdot \frac{y - x \cos \theta_z}{\sqrt{\Phi}}$$

$$v_{\lambda} = f_1(x) - \frac{P \cdot k}{2 \text{ sen } \theta_z} \int \frac{x - y \cos \theta_z}{\sqrt{\Phi}} \cdot dy$$

$$v_{\mu} = f_2(y) - \frac{P \cdot k}{2 \text{ sen } \theta_z} \int \frac{y - x \cos \theta_z}{\sqrt{\Phi}} \cdot dx.$$

E integrando

$$v_{\lambda} = F_1(x) + \frac{P \cdot \text{sen } 2\theta}{4k} \sqrt{\Phi} -$$

$$- \frac{P \cdot k \text{ sen } \theta}{2} \cdot x \lg_e \left[ (y - x \cos \theta) \frac{k}{\text{sen } \theta} + \sqrt{\Phi} \right]$$

$$v_{\mu} = F_2(y) + \frac{P \cdot \text{sen } 2\theta}{4k} \sqrt{\Phi} -$$

$$- \frac{P \cdot k \text{ sen } \theta}{2} \cdot y \lg_e \left[ (x - y \cos \theta) \frac{k}{\text{sen } \theta} + \sqrt{\Phi} \right]$$

5. Ley proporcional a la altura de la membrana.

O sea:

$$U = V = 0 \quad W = k \cdot x \cdot y \cdot \text{sen } \theta \cdot P.$$

Resultado:

$$T = \frac{P \text{ sen } \theta}{2} xy \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{P \text{ sen } \theta}{2} y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{P \text{ sen } \theta}{2} x.$$

$$v_{\lambda} = f_1(x) - \int \frac{\partial T}{\partial x} dy = f_1(x) - \frac{P \text{ sen } \theta}{4} y^2$$

$$v_{\mu} = f_2(y) - \int \frac{\partial T}{\partial y} dx = f_2(y) - \frac{P \text{ sen } \theta}{4} x^2$$





*Iglesia proyectada y construída por el autor en Caracas.*

VI. ESTRUCTURA DE LAS IGLESIAS  
(EN TIRO AL BLANCO) Y EN  
LA CAÑADA (PLAN DEL BANCO  
OBRERO 1956)

La estructura se compone de tres pórticos iguales, situados en tres planos verticales radiales. En el diedro formado por dos de estos tres planos queda alojada una membrana en paraboloides hiperbólico. Las seis membranas principales transforman las cargas verticales en empujes, que se componen dos a dos formando los empujes activos en la dirección de las barras inclinadas en los pórticos. El cálculo de éstos implica, simplemente, el establecimiento del sistema de ecuaciones de los desplazamientos. La ecuación de la membrana es:

$$z = .0447 xy.$$

El peso propio, con revestimientos posibles en intradós y extradós quedó fijado en  $200 \text{ kg/m}^2$ , y la carga útil, de acuerdo con las normas, en  $100 \text{ kg/m}^2$ . Resulta así, como primera aproximación para los esfuerzos tangenciales puros, la tracción y la compresión, los siguientes valores:

$$T = 300 \times 0.86 : 0.0894 = 2.910 \text{ kg/m}$$

$$2.910 \times \text{ctg. } 30^\circ = 5.020 \text{ kg/m} \quad (\text{tracción})$$

$$2.910 \times \text{tg. } 30^\circ = 1.670 \text{ kg/m} \quad (\text{compresión})$$

Resultando como valor unitario de la compresión en el hormigón:

$$1.670 : 400 = 4.18 \text{ kg/cm}^2$$

Pero la carga útil, cuya expresión es

$$S = 300 - 200 \sqrt{\phi}$$

se va reduciendo a medida que el punto se aleja del vértice de la superficie.

En los cuatro vértices del contorno se tiene:

$$\phi_1 = 1 + \left( \frac{0.0447}{0.860} \right)^2 \cdot 8.93^2 = 1.2150$$

$$\phi_2 = \phi_4 = 1 + \left( \frac{0.0447}{0.866} \right)^2 (8.93^2 + 3.57 - 2 \times \\ \times 8.93 \times 3.57 \times 0.5) = 1.164$$

$$\phi_3 = 1 + \left( \frac{0.0447}{0.866} \right)^2 \times 3.57 = 1.0346$$

$$200 \sqrt{\phi_1} = 220 \quad . \quad S_1 = 80 \text{ kg/m}^2$$

$$200 \sqrt{\phi_2} = 216 \quad . \quad S_2 = 84 \text{ kg/m}^2$$

$$200 \sqrt{\phi_3} = 203 \quad . \quad S_3 = 97 \text{ kg/m}^2$$

La simplificación adoptada no introduce, pues, valores peligrosos.

Las membranas pequeñas se calculan de modo análogo, pero el peso propio ha de ser estimado en los puntos de máxima pendiente. Finalmente, los nervios de contorno en todos los casos fueron proyectados de modo que puedan soportar los empujes axiales de las bóvedas y resistir en régimen de flexión su propio peso.