Notas sobre la teoría matemática de la elasticidad

FLEXIÓN LATERAL

por GRACIA, arquitecto

La flexión lateral o pandeo.—Es la deformación finita que, a veces, bajo la acción de fuerzas exteriores, aparece súbitamente antes que el límite de elasticidad se alcance.

El fenómeno se produce en el caso de barras o placas delgadas.

Limitémonos al caso de una barra, recta o curva, simétrica, con relación a un plano, pasando por su fibramedia y solicitada por fuerzas que admiten el mismo plano de simetría. El pandeo supone que el momento flector permanezca nulo durante la puesta en carga, sin lo cual la deformación se produciría de una manera progresiva.

La fibra media ha de coincidir con la curva funicular relativa a las fuerzas exteriores.

Los esfuerzos han de ser de compresión, pues la curva funicular perfectamente flexible no puede permanecer en equilibrio para esta clase de esfuerzos más que merced a una cierta rigidez de la pieza.

Mientras esta rigidez es suficiente para resistir a la deformación, la fibra media conserva su forma, el pandeo aparece en el instante en que el esfuerzo de compresión adquiere un valor capaz de sobrepasar el defecto de flexibilidad.

En el momento del pandeo, la stabilidad de forma primitiva se cambia en inestabilidad.

Para conciliar este hecho con la estabilidad de equilibrio de los sólidos, para los cuales el límite de elasticidad no se ha alcanzado, estudiemos el caso de una barra rectilínea.

Sea I la longitud de una barra empotrada en su extremo inferior, cargada con un peso, P, en el extremo libre. Se desprecia el peso propio.

Las ecuaciones de equilibrio elástico, según Lamé, en la hipótesis de la isotropia de la materia y de la homogeneidad de la misma, son:

$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\,\Delta u+\rho X_0=o$$

$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\,\Delta v+\rho Y_0=o \qquad \left(\Delta u=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\,\Delta w+\rho Z_0=o$$

En las cuales, u, v y w son las componentes del desplazamiento experimentado por el punto, cuyas coordenadas iniciales son x, y y z. Estas componentes son funciones de x, y y z. θ, la dilatación cúbica; λ y μ, los coeficientes de Lamé; ρ, la densidad; X_0, Y_0, Z_0, las componentes de la fuerza, más α, es decir, referida a la unidad de masa.

Las ecuaciones anteriores, llamadas indefinidas, porque se aplican en todos puntos del cuerpo, necesitan se les agreguen las condiciones de la superficie, llamadas así ecuaciones definidas.

Sobre cada elemento de esta superficie está aplicada una fuerza exterior X_0, Y_0, Z_0. Si α, β, γ, designan los cosenos directores de la normal interior, se tiene:

$$\text{[2]}\qquad \begin{aligned} X&=N_1\alpha+T_3\beta+T_2\gamma\\ Y&=T_3\alpha+N_2\beta+T_1\gamma\\ Z&=T_2\alpha+T_1\beta+N_3\gamma\end{aligned}$$

El elemento perpendicular a Ox soporta la tensión normal, N, y una tensión tangencial que tiene por componentes T_2, paralelamente a Oz y T_3, paralelamente a Oy.

Las ecuaciones indefinidas, así como las condiciones en la superficie, son lineales con relación a las incógnitas u, v y w, y con relación a las fuerzas dadas. Resulta de ello que si se conocen los estados de equilibrio correspondientes a varios sistemas diferentes de fuerzas dadas, se obtiene el estado de equilibrio correspondientes a la aplicación simultánea de estos sistemas de fuerzas, componiendo conjuntamente el campo de desplazamientos correspondientes a cada uno de los sistemas. Es la superposición de los estados de equilibrio.

Apliquemos este principio de la superposición de efectos de las fuerzas a las ecuaciones (2).

En el caso que nos ocupa no se pueden considerar los cosenos α, β, γ, como constantes dadas, pues estos cosenos no son independientes de la magnitud de P, pues la barra delgada tiene la propiedad de tomar sin que el límite de elasticidad sobrepase una curvatura finita. Esta curvatura, desde que la barra comienza a flexar, varía con P, y puesto que α, β, γ, son funciones de esta fuerza, resulta que x cesa de ser una función lineal de la carga. El principio de la superposición de esfuerzos no es aplicable, pero nos hemos apoyado en este principio para establecer la estabilidad de equilibrio.

Sea aun una barra terminada por dos empotramientos, de los cuales uno solo es fija y el otro es susceptible de deslizar, aproximándose al primero.

Tomemos por origen el extremo fijo, por eje de las x la fibra media, como antes u, v y w, las componentes del desplazamiento del punto x, y y z. Sea h el desplazamiento arbitrario, imprimido según Ox a la extermidad móvil. Se debe tener $u=h$ para $x=I$.

Por otra parte, X, Y, Z, son nulos sobre la superficie lateral. Estas condiciones determinan, para todos los puntos de la masa, los valores de u, v y w en función de h l y de las dimensiones transversales. Supongamos que comparamos barras de secciones semejantes, y r una de las dimensiones transversales. Es claro que si h, r y l están multiplicadas por un factor arbitrario, es lo mismo para u, v y w. Se puede escribir:

$$u=hf\left(\frac{h}{l}\;\frac{h}{r}\right)$$

$\frac{h}{l}$ es un número muy pequeño, igualmente $\frac{h}{r}$, siempre que la sección recta tenga dimensiones comparables a la longitud l, tenemos entonces sensiblemente $u=hf$ (o,o), es decir, que u puede considerarse proporcional a h. Pero, en el caso de una barra delgada, $\frac{h}{r}$ adquiere un valor notable, y, por consecuencia, la constancia de la razón $\frac{u}{h}$ no puede, cuando h varía, más que tomarse como una simple aproximación. Aquí también el principio de la superposición cae en defecto.

Veamos de precisar las condiciones en las cuales la estabilidad se cambia en inestabilidad.

Sigamos con la barra doble empotramiento. El empotramiento móvil ha sufrido un desplazamiento, h, en el sentido requerido para comprimir la barra; se trata de saber si el equilibrio sin pandeo es estable o inestable. Para esto imaginamos una deformación virtual, indefinidamente pequeña, efectuada (sin nuevo desplazamiento del empotramiento), paparalelamente a uno de los planos de simetría que atribuímos a la barra, y busquemos la variación de potencial.

Cada punto de la fibra media desplaza una cantidad, u, en el sentido del eje de las x, y una cantidad, y, en el sentido transversal. Los desplazamientos, u, producen una variación de potencial total que es infinitamente pequeña, de segundo orden. Esta variación es positiva, pues el equilibrio longitudinal, tal como se realizaría si la barra estuviese guiada en toda su longitud, es evidentemente estable: designémoslo por k.

Pasemos a los desplazamientos transversales, representados por y. El elemento dx de la fibra media toma la longitud $dx\sqrt{1+y'^2}$, que se puede escribir: $dx\left(1+\frac{1}{2}y'^2\right)$, puesto que y' se infinitamente pequeño. El alargamiento de la fibra media es, pues, $\frac{1}{2}\int_0^l (y'^2\,dx)$, y si P designa la fuerza aplicada en el empotramiento, se produce una disminución de potencial igual a $P/2\int_0^l y'^2\,dx$. Al mismo tiempo, la fibra se curva. Si se designa por ρ su radio de curvatura, por I el momento de inercia de la sección perpendicular al plano de la fibra deformada y por E el coeficiente de elasticidad, hay por esta causa, para el fragmento de longitud dx, un aumento de potencial igual a $\frac{EI}{2\rho^2}\,dx$. Se puede, por otra parte, reemplazar $\frac{1}{\rho}$ por y''. El aumento neto de potencial es

$$\Delta U = \frac{EI}{2}\int_0^l (y'')^2\,dx - \frac{P}{2}\int_0^l (y')^2\,dx + k^2$$

y la condición de estabilidad es que esta expresión permanezca positiva, cualquiera que sea la función infinitamente pequeña, y.

Admitamos ahora que esta función pueda representarse por medio de la serie de Fourier,

$$y = a_0 + \Sigma a_n \operatorname{sen}\left(2n\pi\frac{x}{l} + \alpha_n\right)$$

en la cual la suma se refiere a la serie de los números enteros, n, y que esta serie cumpla las condiciones deseadas para ser dos veces derivable. Nos queda:

$$\Delta U = \frac{\pi^2}{l}\Sigma n^2 a_n^2\left[\frac{4\pi^2 n^2 EI}{l^2} - P\right] + k^2.$$

Como los coeficientes a_n son arbitrarios, así como k, la estabilidad exige que la cantidad entre corchetes sea positiva para todo valor del entero n. Resulta que la condición de estabilidad es:

$$P < \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

Es preciso, naturalmente, tomar para I el menor de los momentos de inercia de la sección recta. La condición subsiste cuando se tiene en cuenta la posibilidad de un alabeo, que se puede obtener por la composición de deformaciones efectuadas en dos planos rectangulares.

Sea Ω el área de la sección recta. El esfuerzo, P, tiene por valor $E\Omega\frac{h}{\rho}$. La condición precedente puede escribirse:

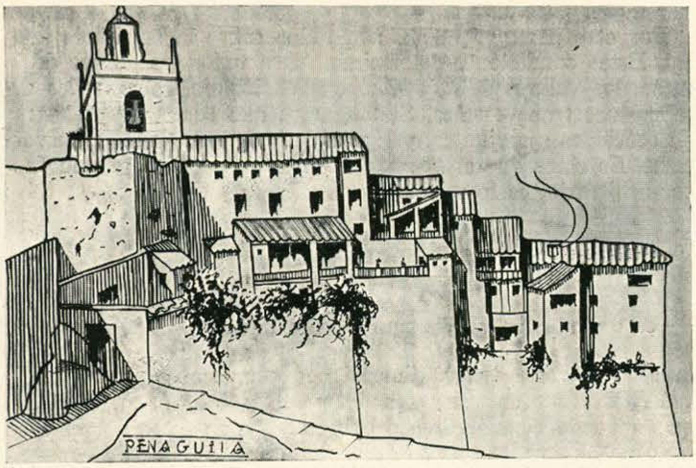
$$h < \frac{4\pi^2 I}{l\Omega}$$

Como esta desigualdad es independiente del coeficiente de elasticidad, E, queda la misma, cualquiera que sea la naturaleza física de la barra.

De una manera general, la flexión lateral aparece cuando, para ciertas deformaciones virtuales del sistema considerado, el trabajo de las fuerzas exteriores, evaluado teniendo en cuenta los infinitamente pequeños de segundo orden, crece más de prisa que el potencial de las fuerzas interiores.

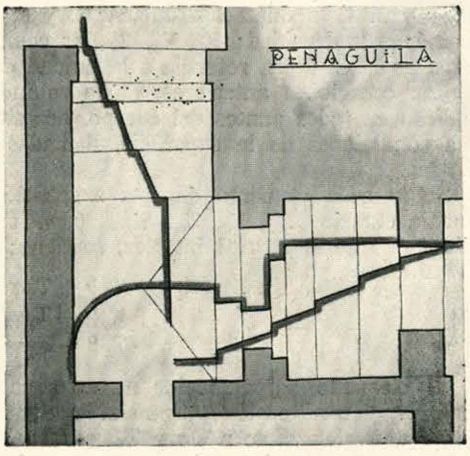
VILLAS LEVANTINAS

PENAGUILA (Alicante)



VISTA DESDE EL "CUGAT"

Las pintorescas y viejas villas de la Meseta Central, frecuentadas por el turismo, son hoy día bastante conocidas, divulgados sus aspectos por la fotografía y el dibujo; en cambio, hay otras de las regiones periféricas—singularmente de la levantina—, cuyos interesantes aspectos permanecen casi inéditos. Tal es, por ejemplo, la de Penáguila, cuyo nombre ya es bastante expresivo de su situación escarpada y medieval, en un terreno montuoso, regado por diferentes arroyos que contribuyen a formar el río que lleva el mismo nombre que la villa, situada en la provincia de Alicante, en las vertientes de la sierra Aytana, a 15 kilómetros y medio de Alcoy, con 1.400 habitantes hoy día. Abonan el abolengo militar y su papel en las luchas de la Reconquista los importantes restos de su recinto murado, con numerosas torres—como la Vernet, cuyos planos y vistas se acompañan—, y la puerta llamada "El Portalet", de excepcional importancia, por tratarse de una entrada en recodo, probablemente del recinto musulmán.



PLANTA DE PUERTA "EL PORTALET"